This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

Math 1648.92

Harvard College Library

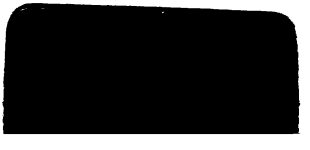
FROM THE

SUBSCRIPTION FUND,

BEGUN IN 1858.

22 Dec. 1892.

TRANSFERRED TO
CABOT SCIENCE LIBRARY



VORLESUNGEN

ÜBER DIE

NATUR DER IRRATIONALZAHLEN

VON

PAUL BACHMANN.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1892.

1648.92
Math 1665.12

HARVARD COLLEGE
DEC 22 1892
LIBRARY

Subscription fund.

8961
25

Vorrede.

Die irrationalen Zahlen haben stets das Interesse der Mathematiker in hervorragender Weise in Anspruch genommen. Theils mussten diese ihre Bemühungen darauf richten, eine genaue und widerspruchsfreie Fassung des Begriffs derselben zu geben, in welcher ihr eigentliches Wesen zum Ausdruck kommt, und so ihre Einführung in die Rechnung fest zu begründen; theils reizte die unendliche Mannigfaltigkeit der Irrationalzahlen, auf welche Algebra und höhere Analysis führten, zu der Frage, in welcher Weise sie unter einander verbunden und wieder von einander unterschieden sind, und wie eine jede einzelne Gattung derselben in eigenthümlicher Weise zu kennzeichnen, kurz, welches die eigentliche arithmetische Natur der einzelnen Irrationalzahlen sei.

In beiden Beziehungen sind gerade in neuerer Zeit die Irrationalzahlen wieder vorzüglicher Gegenstand der Betrachtung geworden. Die feinere Ausbildung des Funktionsbegriffes und anderer damit zusammenhangender fundamentaler Punkte der Differenzial- und Integral-Rechnung auf der einen, die strengere Begründung der Lehre von den complexen Grössen und ihrer Funktionen auf der anderen Seite sind Anlass geworden, dass die Mathematiker der Neuzeit wie auf den Zahlenbegriff überhaupt, so insbesondere auch auf eine angemessene Definition der Irrationalzahlen mit Vorliebe wieder ihre Aufmerksamkeit gerichtet haben. Vor allen war es hier Herr Weierstrass, der in seinen Vorlesungen über Funktionentheorie in systematischer Weise sich darüber verbreitete; von seinen Gedanken hat einer seiner Schüler, Herr Kossak

(im Programm des Friedrich-Werder'schen Gymnasiums zu Berlin, 1872) eine ausführliche Darstellung gegeben. Nach ihm seien hier nur erwähnt die Arbeiten von E. Heine (Journal für die r. u. a. Mathematik Bd. 74, pag. 172)*), von Herrn Dedekind (Stetigkeit und irrationale Zahlen, Braunschweig 1872, und: Was sind und was sollen die Zahlen? ebendas. 1888), sowie die Abhandlung von Herrn Kronecker über den Zahlbegriff (im Journal f. d. r. u. a. M. 101. Bd.).

Aber auch in der zweitgenannten Richtung hat die neueste Zeit einige epochemachende Untersuchungen und Ergebnisse zu verzeichnen. Nachdem es bereits Liouville gelungen war, zu beweisen, dass es Irrationellen giebt, welche auf keine Weise als Wurzeln algebraischer Gleichungen aufgefasst werden können, war es in hohem Grade interessant zu entscheiden, ob die überall in der Analysis auftretenden beiden, durch e und π bezeichneten Zahlen zu diesen nicht algebraischen Irrationalzahlen zu rechnen sind. Es ist das Verdienst des Herrn Hermite, auf sehr genialem Wege nachgewiesen zu haben, dass die Zahl e eine transcendente Zahl ist; und weiter bauend auf den von ihm gegebenen Grundlagen erreichte Herr Lindemann den gleichen Nachweis auch für die Ludolph'sche Zahl π, und bewies damit zugleich, dass die Quadratur des Kreises eine Unmöglichkeit sei. Da hiermit die Untersuchungen über die Natur der Irrationalzahlen in einem der interessantesten Punkte zu einem gewissen Abschlusse gelangt sind, hat der Verfasser dieses Buches es für zeitgemäss und erwünscht erachtet, die wichtigsten Untersuchungen, welche bisher in der angegebenen Richtung geführt worden sind, für einen grösseren mathematischen Leserkreis im Zusammenhange darzustellen, indem er eine Vorlesung, die er zu wiederholten Malen über diesen Gegenstand gehalten, weiter ausführte; wobei er, um den Inhalt des Buches möglichst weiten Kreisen zugänglich zu

*) Vgl. dazu G. Cantor's Abh. in Math. Annalen Bd. 5 pag. 123, oder seine Mannigfaltigkeitslehre, Leipz. 1883, pag. 21. Den Standpunkt dieser Arbeiten habe ich im wesentlichen zu dem meinigen gemacht trotz der Kritik, welche die Aufsätze von Illigens, Math. Ann. Bd. 33 u. 35 an ihm üben; die Begründung dafür muss ich für eine andere Stelle mir vorbehalten.

machen, das Mass der Vorkenntnisse thunlichst zu beschränken bemüht gewesen ist.

Nachdem dabei die Irrationalzahlen, im wesentlichen nach Heine's Gesichtspunkten, begrifflich festgestellt sind, wobei eine grössere Anschaulichkeit erreicht sein dürfte durch Einführung des Begriffes „zweier gegen einander convergirender Werthreihen", werden einige Fundamentalsätze von algebraischen Zahlen hergeleitet, welche auf ihre allgemeinste Definition sich beziehen. Nach dem Grade der Gleichung, durch welche sie bestimmt sind, können sie unterschieden werden in quadratische, kubische Irrationellen u. s. w., und es fragt sich, welche rein arithmetischen Kennzeichen dieser algebraischen Eintheilung adäquat sind. Dasjenige für die quadratischen Irrationellen ist seit längerer Zeit schon bekannt und besteht darin, dass sie und nur sie allein in periodische Kettenbrüche entwickelbar sind; für die Irrationellen höheren Grades fehlt jedoch noch jedes ähnliche Kennzeichen, und nur ein erster Schritt, zu einem solchen zu gelangen, darf in einer Arbeit von Jacobi über Kettenbruchalgorithmen erblickt werden. Im Folgenden wird nun zunächst jenes arithmetische Kennzeichen der quadratischen Irrationellen nach Lagrange'schen Gesichtspunkten hergeleitet, nachdem zuvor die elementare Grundlage der Herleitung, die Theorie der Kettenbrüche, zur Vorbereitung auf Jacobi's Arbeit, mittels eines Algorithmus entwickelt worden, von welchem der Jacobi'sche nur eine einfache Verallgemeinerung ist. Dann folgt Liouville's Nachweis von dem Vorhandensein nicht algebraischer Irrationellen und eine kurze Uebersicht der Hauptarbeiten, durch welche Lambert, Legendre und Liouville über die Natur der Zahlen e und π Licht zu verbreiten gesucht haben. Ausführlich stellen wir darauf die Hermite'schen Arbeiten über die Zahl e, wie sie sich finden im Journal für die r. u. a. Mathematik Bd. 76 pag. 303 und 342 und in der Schrift Sur la fonction exponentielle, Paris 1874, in ihrem Zusammenhange dar, und geben dann einen Theil der Lindemann-schen Untersuchung über die Ludolph'sche Zahl, soweit es erforderlich ist, um von ihrem Gang und Charakter eine genügende Vorstellung zu bilden; statt sie im Ganzen zu ent-

wickeln, ziehen wir es vor, den Nachweis für die Transcendenz der Zahl π auf dem einfacheren Wege zu erbringen, welchen Herr Weierstrass uns gelehrt hat. Konnte soweit von Untersuchungen berichtet werden, welche zu endgiltigen Ergebnissen geführt haben und als abgeschlossen zu betrachten sind, so giebt eine letzte Vorlesung Kenntniss von den Kettenbruchalgorithmen von Jacobi und von den wenigen, noch unzureichenden Resultaten, zu denen der Versuch, Kennzeichen ähnlich dem für die quadratischen Irrationellen gefundenen auch für die kubischen zu ermitteln, bisher geführt, und bei welchen die Erforschung der Natur der Irrationalzahlen ihren einstweiligen Abschluss gefunden hat.

Weimar, 28. November 1891.

Inhaltsverzeichniss.

Erste Vorlesung.

Definition der Irrationalzahlen.

Seite

Nr. 1. Die Gleichung $x^2 = D$ ist durch rationale x nur lösbar, wenn D eine positive Quadratzahl ist . . . . . 1—3
Nr. 2. Verallgemeinerung. Algebraische Zahlen . . . . . 3—4
Nr. 3. Sinn einer Lösung der Gleichung $x^2 = 13$. Zwei gegen einander convergirende Werthreihen . . . . . 4—6
Nr. 4. Definition einer *Zahl* durch zwei solche Reihen 6—9
Nr. 5. Nähere Begründung durch den Nachweis, wie mit den definirten Zahlen zu rechnen sei. Summe, Differenz und Produkt . . . . . 9—11
Nr. 6. Grössenordnung, Gleichheit, die Null . . . . . 11—13
Nr. 7. Der Quotient . . . . . 13—14
Nr. 8. Geltung der fundamentalen Rechnungsregeln . . . . . 14—16

Zweite Vorlesung.

Ueber algebraische Zahlen.

Nr. 1. Allgemeines . . . . . 16—18
Nr. 2 und 3. Zwei fundamentale Sätze über algebraische Zahlen 18—22
Nr. 4. Giebt es auch nichtalgebraische Zahlen? und wie unterscheiden sich arithmetisch die algebraischen Zahlen verschiedenen Grades? . . . . . 22—24

Dritte Vorlesung.

Die Kettenbrüche.

Nr. 1. Die fundamentalen rekurrirenden Gleichungen . . . . 24—27
Nr. 2. Der Kettenbruch und seine Näherungsbrüche . . . . . 27—30
Nr. 3. Sätze über die Annäherung . . . . . 30—34
Nr. 4. Unendliche Kettenbrüche . . . . . 34—36
Nr. 5. Periodische Kettenbrüche; sie sind quadratischen Irrationellen gleich. . . . . 36—37

Vierte Vorlesung.

Die quadratischen Irrationellen.

Seite

Nr. 1. Hilfssätze über quadratische Formen . . . . . 38—41
Nr. 2. Aus gegebener Form werden mittels der Kettenbruchentwicklung einer ihrer Wurzeln unendlich viel äquivalente Formen hergeleitet . . . . . 41—42
Nr. 3. Beziehungen zwischen den Wurzeln zweier aufeinanderfolgender dieser Formen . . . . . 43—45
Nr. 4 bis 6. Quadratische Irrationellen haben eine periodische Kettenbruchentwicklung. Arithmetisches Kennzeichen der quadratischen Irrationellen. . . . 45—49

Fünfte Vorlesung.

Vorhandensein transcendenter Zahlen. — Geschichtliches über die Zahlen e und π.

Nr. 1. Liouville's Satz über eine Eigenschaft jeden Kettenbruchs, in welchen eine algebraische Zahl n^{ten} Grades entwickelbar ist . . . . . 49—52
Nr. 2. Vorhandensein transcendenter Zahlen . . . . . 52—53
Nr. 3. Die die Zahlen e und π betreffenden Untersuchungen . 53—54
Nr. 4. Lambert's Kettenbrüche . . . . . 54—55
Nr. 5. Hilfssatz von Legendre über Kettenbrüche . . . . . 56—58
Nr. 6. Lambert's Sätze über e und π nach Legendre. . . 58—59
Nr. 7. Liouville's Sätze über die Zahl e . . . . . 59—64

Sechste Vorlesung.

Hermite's Untersuchung der Zahl e.

Nr. 1. Herleitung des Lambert'schen Kettenbruchs für tang x aus rekurrirenden Integralformeln von der Gestalt:

$$A_n = \int_0^x x A_{n-1}\, dx \quad \ldots \quad 64—67$$

Nr. 2. Zweite Form der Grössen A_n . . . . . 67—69
Nr. 3. Dritte Form der A_n als bestimmte Integrale . . . . . 69—71
Nr. 4. Neue Herleitung der Sätze von Lambert und Legendre über die Zahl π . . . . . 71—72
Nr. 5. Aus den A_n werden andere Grössen $A_n^{(i)}$ hergeleitet, für welche die Rekursionsformel besteht:

$$A_{n+1}^{(i)} = (2n + i + 1)\, A_n^{(i)} - x \cdot A_n^{(i-1)}.$$

Die allgemeine Form der $A_n^{(i)}$ . . . . . 72—76

Seite

Nr. 6. Annäherung an die Exponentialfunktion e^x mittels einer rational-gebrochenen Funktion . . . . . 76—77

Nr. 7. Auffindung einer solchen Funktion, welche die Annäherung für einen gegebenen Grad leistet, mittels einer elementaren Integralformel . . . . . 77—79

Nr. 8. Beispiel; e^x ist irrational, sobald x rational ist . . . 79—82

Siebente Vorlesung.

Fortsetzung.

Nr. 1. Gleichzeitige Annäherung desselben Grades an die n Exponentialfunktionen $e^{z_1 x}$, $e^{z_2 x}$, ... $e^{z_n x}$ mittels n Näherungsbrüchen mit gleichem Nenner . . . . . 82—83

Nr. 2 und 3. Eigenthümlicher Zusammenhang zwischen den aufeinanderfolgenden Näherungsbrüchen . . . . . 83—89

Nr. 4 und 5. Grundlegende Eigenschaften der dabei auftretenden Grössen

$$\varepsilon_{i,m}^{h} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (m-1)} \cdot \int_{z_0}^{z_i} e^{-z} \cdot \frac{f(z)^m}{z - z_h}\, dz,$$

worin $z_0, z_1, z_2, \ldots z_n$ die Wurzeln der ganzen Funktion $f(z)$ sind . . . . . 89—93

Nr. 6. Aus ihnen wird die Transcendenz der Zahl e hergeleitet . . . . . 93—95

Nr. 7. Specieller Fall; der Lambert'sche Kettenbruch für $\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ . . . . . 95—97

Achte Vorlesung.

Die Ludolph'sche Zahl π.

Nr. 1. Allgemeines über complexe Integrale . . . . . 97—100

Nr. 2. Obwohl bei der Untersuchung des Herrn Lindemann über die Zahl π die $\varepsilon_{i,m}^{h}$ complexe Integrale werden, bleibt die Hermite'sche Grundlage bestehen . . . . 100—101

Nr. 3. Der Keim der Lindemann'schen Betrachtung. Sind $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_r$ die Wurzeln einer ganzzahligen irreduktibeln Gleichung r^{ten} Grades, so handelt es sich zu beweisen, dass keine Gleichung möglich ist von der Form:

$$N_0 + N_1 \cdot \sum e^{\xi_1} + N_2 \cdot \sum e^{\xi_1 + \xi_2} + \cdots + N_r \cdot e^{\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_r} = 0 \quad 101—103$$

Nr. 4—6. Beweis für den Fall, dass die algebraisch verschiedenen Werthe der in den Exponenten enthaltenen Wurzelfunktionen auch numerisch ungleich sind . . 103—110

Neunte Vorlesung.

Weierstrass'scher Beweis der Transcendenz von π.

Seite

Nr. 1. Statt der Lindemann'schen Beweisführung wird die einfachere des Herrn Weierstrass gewählt. Sie knüpft an die elementare Integralformel der Hermite'schen Betrachtung (6. Vorl. Nr. 7) an . . . . 111—112

Nr. 2 und 3. Herleitung eines Hilfssatzes . . . . . 112—115

Nr. 4 und 5. Der Weierstrass'sche Beweis . . . . . 116—120

Nr. 6. Die Quadratur des Kreises. Durch den Lindemann'schen Satz von der Zahl π ist ihre Unmöglichkeit erwiesen . . . . . 121—123

Nr. 7. Allgemeinere Lindemann'sche Sätze . . . . . 123—125

Zehnte Vorlesung.

Ueber die kubischen Irrationellen.

Nr. 1. Geschichtliches über die Versuche, ein arithmetisches Kennzeichen derselben zu ermitteln . . . . . 125—129

Nr. 2. Jacobi's Kettenbruchalgorithmus . . . . . 129—132

Nr. 3. Specialisirung. Wenn dieser zu zwei Grössen $\frac{v_0}{u_0}, \frac{w_0}{u_0}$ gehörige Kettenbruchalgorithmus periodisch wird, sind die Grössen kubische Irrationellen . . . . . 132—136

Nr. 4. Untersuchung der Umkehrung. Vorläufige Bemerkungen über complexe ganze Zahlen, welche aus den Wurzeln α, β, γ einer kubischen Gleichung gebildet sind. Neue Specialisirung des Kettenbruchalgorithmus 136—140

Nr. 5. Aus der Form

$$N(x,y,z) = (x\alpha^2 + y\alpha + z)(x\beta^2 + y\beta + z)(x\gamma^2 + y\gamma + z)$$

werden mittels des Kettenbruchalgorithmus unendlich viel äquivalente Formen $N_i(x', y', z')$ hergeleitet . . 140—144

Nr. 6. Beschränkung auf die kubische Gleichung $x^3 = D$. Die beiden Grössensysteme ϖ_i, $\varphi_i(\alpha)$, $\psi_i(\alpha)$ und $\frac{v_i}{u_i}, \frac{w_i}{u_i}$ . . . . . 144—147

Nr. 7. Ist die Reihe der einen von ihnen periodisch, so hat die andere genau dieselbe Periode. Sie werden periodisch, wenn ϖ_i, $\varphi_i(\alpha)$, $\psi_i(\alpha)$ bei unendlich wachsendem i endlich bleiben . . . . . 147—148

Nr. 8. Nothwendige und hinreichende Bedingung dafür. Schlussbemerkung . . . . . 148—151

Erste Vorlesung.

Definition der Irrationalzahlen.

1. Es ist bekannt, dass die Arithmetik ihren Ausgangspunkt von den positiven ganzen Zahlen nimmt, welche die sogenannte natürliche Zahlenreihe

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots .$$

bilden, dass diese jedoch keineswegs ausreichen, um alle arithmetischen Aufgaben zu lösen. Man muss vielmehr zu diesem Zwecke zu den positiven noch die negativen ganzen Zahlen, zu den ganzen Zahlen die gebrochenen hinzunehmen, und erhält so die Gesammtheit der rationalen Zahlen, welche allgemein als Verhältnisse zweier ganzen Zahlen dargestellt werden können. Aber auch mit den rationalen Zahlen kommt man noch nicht aus. Fragen wir z. B. nach der Bedingung, unter welcher die Gleichung

$$x^2 = D, \tag{1}$$

wenn D eine positive Zahl ist, eine rationale Wurzel hat, so kann diese Wurzel entweder eine ganze Zahl $x = n$ sein, und folglich müsste dann D das Quadrat einer ganzen Zahl, $D = n^2$, sein; oder x ist eine gebrochene Zahl, $x = \frac{p}{q}$; dann kann dieser Bruch auf seine kleinste Benennung gebracht, also p, q als zwei ganze Zahlen ohne gemeinsamen Theiler angenommen werden, während q von 1 verschieden ist. Aus der Gleichung (1) ergäbe sich dann

$$p^2 = Dq^2,$$

und folglich müsste jede in q aufgehende Primzahl auch in p enthalten sein, gegen die Voraussetzung. Hiernach kommen

wir zu dem Schlusse: Wenn D nicht das Quadrat einer ganzen Zahl ist, so giebt es keine rationale Zahl, welche die Gleichung (1) befriedigt; im entgegengesetzten Falle ist die rationale Wurzel eine ganzzahlige, nämlich, wenn $D = n^2$ ist, $x = \pm n$.

Wir haben uns zum Beweise dieses bekannten Elementarsatzes auf ein arithmetisches Princip betreffend die Theilbarkeit der ganzen Zahlen gestützt. Man kann aber dasselbe auch ohne dieses Princip nachweisen*), wenn man sich eines Ausdruckes bedient, den wir hier sogleich anführen wollen, da wir auch später von ihm wieder Gebrauch zu machen haben. Dies ist der Ausdruck

$$x^2 - Dy^2,$$

eine sogenannte quadratische Form. Derselbe hat die fundamentale Eigenschaft, dass er, mit einem Ausdrucke gleicher Gestalt multiplicirt, sich wiederherstellt, d. h. wieder in die gleiche Gestalt gebracht werden kann. Es besteht nämlich folgende Identität:

(2) $(x^2 - Dy^2) \cdot (x'^2 - Dy'^2) = (xx' - Dyy')^2 - D \cdot (xy' - x'y)^2.$

Angenommen nun, D sei keine Quadratzahl, es existire aber gleichwohl eine rationale Zahl, deren Quadrat gleich D ist, so gäbe es auch zwei positive ganze Zahlen p, q, für welche

(3) $$p^2 - Dq^2 = 0$$

ist; unter allen solchen Systemen sei p, q dasjenige, bei welchem q am kleinsten ist. Nun kann man eine positive ganze Zahl k so wählen, dass

$$k^2 < D < (k+1)^2,$$

folglich

(4) $$kq < p < (k+1)q$$

ist, und demnach die Zahlen

$$p - kq$$

$$p^2 - kpq = Dq^2 - kpq,$$

endlich auch

*) Dedekind, Stetigkeit und irrationale Zahlen, Braunschweig 1872, pag. 20.

$$Dq - kp$$

positiv sind. Setzt man dann in der Formel (2)

$$x = p, \quad y = q, \quad x' = k, \quad y' = 1,$$

so liefert sie folgende Beziehung:

$$(p^2 - Dq^2) \cdot (k^2 - D) = (pk - Dq)^2 - D \cdot (p - qk)^2,$$

oder auch wegen (3):

$$p'^2 - Dq'^2 = 0,$$

wenn unter p', q' die beiden positiven ganzen Zahlen

$$p' = Dq - pk, \quad q' = p - qk$$

verstanden werden, von welchen nach der zweiten der Ungleichheiten (4) $q' < q$ ist, was der Bedeutung von q widerstreitet.

2. Der soeben auf zwiefache Weise bewiesene Satz ist nur der einfachste Specialfall eines weit allgemeineren. Um letzteren einfach aussprechen zu können, betrachten wir irgend eine algebraische Gleichung von beliebigem Grade:

$$ax^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \cdots + a_m = 0,$$

in welcher die Coefficienten ganze Zahlen oder, indem wir den höchsten immer gleich 1 voraussetzen wollen, die Gleichung

$$x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \cdots + A_m = 0, \tag{5}$$

in welcher die Coefficienten rationale Zahlen sind. Die Wurzel jeder solchen Gleichung werden wir mit Kronecker kurz eine algebraische Zahl und, wenn sämmtliche Coefficienten ganzzahlig sind, eine ganze algebraische Zahl nennen. Der Satz, den wir meinen, lautet dann einfach so: Eine ganze algebraische Zahl ist eine gewöhnliche ganze Zahl, wenn sie rational ist. Denn, ist $x = \frac{p}{q}$ eine rationale Lösung der Gleichung (5), wobei wieder p, q als zwei ganze Zahlen ohne gemeinsamen Theiler vorausgesetzt werden dürfen, so giebt die Einsetzung dieses Werthes in die Gleichung (5) sofort folgende Beziehung:

$$p^m = -q\,[A_1 p^{m-1} + A_2 p^{m-2} \cdot q + \cdots + A_m q^{m-1}],$$

d. h. p^m gleich einem Vielfachen von q, und demnach wäre p durch jeden in q enthaltenen Primfaktor theilbar, was der An-

nahme über p, q widerstreitet, es sei denn $q = 1$, also $x = p$ eine ganze Zahl.

Hieraus schliessen wir zugleich, dass eine Gleichung von der Art wie (5) mit ganzzahligen Coefficienten, welche keine ganze Wurzel hat, auch keine rationale Wurzel haben kann.

3. Wenn nun eine gegebene Gleichung dieser Art durch keine rationalen Werthe befriedigt wird, so stehen wir vor der Wahl, entweder zu erklären, dass sie keine Lösung zulasse, oder ihre Lösung zu ermöglichen, indem wir neue Zahlen schaffen und einführen, welche dazu geeignet sind, nämlich die irrationalen. Man stösst bekanntlich in der Anwendung überall, schon bei den einfachsten Aufgaben, auf Fälle, welche die Zulassung solcher Zahlen gebieterisch fordern. Man denke nur an ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Katheten gleich 2 und 3 Längeneinheiten sind, so wird die Länge x der Hypotenuse durch die Gleichung

$$x^2 = 4 + 9 = 13$$

bestimmt; obwohl also die Hypotenuse selbst eine völlig bestimmte Grösse ist, kann doch ihr Werth so lange nicht angegeben werden, als man sich auf die Betrachtung rationaler Zahlen beschränkt. Aber die Anwendbarkeit eines Begriffes kann im Grunde nicht als eine ausreichend wissenschaftliche Begründung desselben angesehen werden, man muss vielmehr zeigen, dass die Definition des Begriffes von einem ganz bestimmten, vernünftigen Sinne und so der Begriff in sich selbst begründet ist. Und so haben wir also zu fragen: Hat es einen Sinn, eine Zahl x durch die Bedingung z. B. zu definiren, dass $x^2 = 13$ sei, und welches ist dieser Sinn?*)

Eine rationale Zahl x giebt es, wie wir wissen, nicht, die der Gleichung genügte; zunächst aber giebt es unter den ganzen Zahlen zwei, die ihr möglichst nahe genügen, nämlich 3 und 4, jene zu klein, diese zu gross, denn ihre Quadrate sind 9 und 16; desgleichen unter den einstelligen Decimalbrüchen zwei, nämlich 3,6 und 3,7, die möglichst nahe ge-

*) Vgl. zum Folgenden E. Heine, Die Elemente der Funktionenlehre, im J. f. d. r. u. a. Math. Bd. 74.

nügen, jene zu klein, diese zu gross, mit den Quadraten 12,96 und 13,69; ebenso zwei meist genäherte Zahlen unter den zweistelligen Decimalbrüchen, 3,60 und 3,61, etwas zu klein und etwas zu gross, mit den Quadraten 12,9600 und 13,0321 u. s. w. Kurz, es lassen sich zwei unbegrenzte Reihen rationaler Zahlen aufstellen:

$$(6)\quad \begin{cases} 3;\ 3{,}6;\ 3{,}60;\ 3{,}605;\ 3{,}6055;\ 3{,}60555;\ \cdots \\ 4;\ 3{,}7;\ 3{,}61;\ 3{,}606;\ 3{,}6056;\ 3{,}60556;\ \cdots \end{cases}$$

von der Beschaffenheit, dafs zwar die Quadrate der ersteren Zahlen stets zu klein, die Quadrate der letzteren stets zu gross sind, dass jedoch, wenn die Zahlen dieser beiden Reihen nach einander für x eingesetzt werden, die Gleichung $x^2 = 13$ mit stets wachsender Annäherung gelöst, der begangene Fehler stets kleiner wird, und verschwindend klein werden würde, wenn man jede dieser beiden Reihen ins Unendliche fortsetzen würde. Die beiden Reihen haben zudem die Eigenschaft, dass die erstere eine Reihe wachsender, die zweite eine Reihe abnehmender Zahlen ist, und dafs der Unterschied zwischen zwei entsprechenden Gliedern beider Reihen unter jeden Grad von Kleinheit herabsinkt, wenn man die Reihen weit genug fortsetzt. Aus dieser Ursache wollen wir die erstere Reihe die ansteigende, die zweite die absteigende, beide zusammen aber zwei gegen einander convergirende Zahlenreihen nennen.

Aus dem Gesagten geht nun hervor, dass, wenn die Gleichung $x^2 = 13$ durch eine Zahl gelöst wird, diese stets zwischen den sich entsprechenden Gliedern der beiden Zahlenreihen (6) enthalten sein muss, und da die Glieder gegen einander convergiren, d. h. schliesslich sich um weniger von einander unterscheiden, als irgend ein angebbarer Werth, sich von diesen Gliedern selbst um so weniger wird unterscheiden können. Wir dürfen jene Zahl x dann also als den gemeinsamen Grenzwerth beider gegen einander convergirenden Zahlenreihen bezeichnen. Umgekehrt, wenn eine Zahl x existirt, welche stets von diesen beiden Reihen umschlossen wird und daher als ihr gemeinsamer Grenzwerth bezeichnet werden darf, so darf diese auch als eine Lösung der

Gleichung $x^2 = 13$ aufgefasst werden. Wir erkennen hieraus, dass die Annahme einer *Zahl*, welche der Gleichung $x^2 = 13$ genügt, gleichbedeutend ist mit der andern Annahme, dass den beiden gegen einander convergirenden Reihen (6) eine *Zahl* zugehört, die sie zu gemeinsamem Grenzwerthe haben.

4. Wie steht es nun mit der Berechtigung dieser letzteren Auffassung?

Zuerst wollen wir daran erinnern, dass es ganz gang und gäbe ist, rationale Zahlen als solche Grenzwerthe aufzufassen, denn wenn wir z. B. die Zahl $\frac{1}{3}$ durch den unendlichen Decimalbruch $0{,}33333\cdots$ ersetzen, so heisst das, genau besehen, nichts anderes, als dass wir sie auffassen als den gemeinsamen Grenzwerth der beiden gegen einander convergirenden Zahlenreihen:

$$\begin{array}{lllllll} 0; & 0{,}3; & 0{,}33; & 0{,}333; & 0{,}3333; & \cdots & \text{ansteigend,} \\ 1; & 0{,}4; & 0{,}34; & 0{,}334; & 0{,}3334; & \cdots & \text{absteigend} \end{array}$$

zwischen deren sich entsprechenden Gliedern $\frac{1}{3}$ stets enthalten bleibt. In gleicher Weise kann man jede rationale Zahl, und zwar auf mannigfache Weise, als gemeinsamen Grenzwerth zweier gegen einander convergirenden Zahlenreihen auffassen, z. B. die Null als Grenzwerth der beiden Reihen:

$$\begin{array}{llllll} 1, & \frac{1}{2^m}, & \frac{1}{3^m}, & \frac{1}{4^m}, & \cdots \\ -1, & -\frac{1}{2^m}, & -\frac{1}{3^m}, & -\frac{1}{4^m}, & \cdots, \end{array}$$

wenn m positiv ist, und je nachdem man für m diesen oder jenen positiven Werth wählt, würde man verschiedene solche Bestimmungsweisen erhalten.

Zweitens ist uns aber die in Frage gestellte Auffassung überhaupt ganz geläufig. Nehmen wir irgend einen unendlichen Decimalbruch, z. B. denjenigen, bei welchem die ersten Decimalziffern die Zahlen 1 bis 9 sind, auf welche sie dann jedesmal zweifach, dann dreifach wiederholt folgen u. s. w., also:

$$0{,}123456789112233445566778899111222\cdots$$

Niemand von uns nimmt Anstand, unter demselben eine ganz bestimmte Zahl zu verstehen, obwohl wir nicht wissen, vielmehr ernstlich daran zweifeln dürfen, ob sie durch einen rationalen Werth ausdrückbar sein mag; wir haben uns eben daran gewöhnt, mit solchen unendlichen Brüchen den Sinn einer bestimmten Zahl zu verknüpfen. Im Grunde ist nun aber dieser Sinn des Decimalbruches kein anderer als der, der gemeinsame Grenzwerth für die folgenden zwei gegen einander convergirenden Zahlenreihen zu sein:

0	1
0,1	0,2
0,12	0,13
0,123	0,124
. . . . .	

und sonach verbinden wir also aus Gewohnheit mit diesen beiden Zahlenreihen unbedenklich die Vorstellung einer bestimmten Zahl als ihres gemeinsamen Grenzwerthes. Nun betrachten wir irgend zwei gegen einander convergirende Zahlenreihen

$$(7) \qquad \begin{cases} a_1, & a_2, & a_3, & \cdots & a_i, & \cdots \\ b_1, & b_2, & b_3, & \cdots & b_i, & \cdots, \end{cases}$$

von denen die erstere die ansteigende, die zweite die absteigende sein mag, d. h. zwei Reihen, in denen für jeden Werth des Index i die Bedingungen erfüllt sind:

$$b_i > b_{i+1} > a_{i+1} > a_i$$

und die Differenz $b_i - a_i$ mit wachsendem Index unendlich klein wird. Offenbar wäre es nur eine Verallgemeinerung obiger Auffassung, wenn wir auch von diesen zwei gegen einander convergirenden Werthreihen aussagten, dass sie mit einander eine Zahl als ihren gemeinsamen Grenzwerth bestimmen. Indessen dürfen wir nicht übersehen, dass solche Auffassung zweierlei in sich schliesst: 1) die Annahme, dass beide Reihen thatsächlich eine gemeinsame Grenze haben, d. h. dass etwas existirt, was als gemeinsame Grenze beider vorgestellt werden kann, und 2) dass dies Existirende als eine Zahl betrachtet werden darf. Der Strenge der Arithmetik, welche von allen Theilen der Mathematik als die „reinste“

Wissenschaft gilt, entspräche es wenig, wenn wir ihre fundamentalsten Begriffe auf Axiome, wie die erste, weder erwiesene noch überhaupt nachweisbare Annahme es wäre, begründen würden. Wir stellen uns daher auf einen anderen Standpunkt, den zuerst Heine eingenommen hat.*)

Wir stellen in der That die *Definition* auf: Die beiden gegen einander convergirenden Zahlenreihen (7) *bestimmen* mit einander eine Zahl oder es *entspreche* ihnen eine Zahl z. Aber wir ziehen nicht, um sie vorzustellen, den Begriff der Grenze zu Hilfe, sondern fassen sie — zunächst ganz mit Heine — rein formell als ein Zahlzeichen, indem wir darunter das Symbol

$$(8) \qquad z = \begin{pmatrix} a_1, & a_2, & a_3, & \cdots & a_i, & \cdots \\ b_1, & b_2, & b_3, & \cdots & b_i, & \cdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix}$$

verstehen, auf. Um diesen allgemeineren Zahlenbegriff in Verbindung zu bringen mit dem gewohnten Begriffe der rationalen Zahlen, setzen wir ferner fest, dass, so oft eine rationale Zahl z vorhanden ist, welche stets zwischen a_i, b_i enthalten bleibt und daher als gemeinsamer Grenzwerth beider Reihen aufgefasst werden darf, *diese Zahl* unter dem Symbole (8) verstanden werden soll. Und endlich nennen wir die durch das Symbol (8) definirte Zahl z allgemein den gemeinsamen Grenzwerth der zwei gegen einander convergirenden Zahlenreihen (7). — Sonach hätten wir die allgemeineren Zahlen nach Heine's Vorgange lediglich als Zahlzeichen definirt. Wollen wir aber diesen formellen Zeichen auch einen realen Sinn untergelegt sehen, so können die rationalen Zahlen uns dazu führen. Eine solche, $\frac{m}{n}$, tritt zunächst auch nur als ein Symbol oder als ein Zahlzeichen auf, durch welches die rationale Zahl als den Zahlen m, n entsprechend bezeichnet wird; es bedeutet aber sodann das Resultat einer Reihe von Operationen, welche an der Einheit vollzogen werden sollen, und enthält demnach in sich den Ausdruck einer ganz bestimmten *Forderung*, ohne Rücksicht übrigens darauf, ob oder wie diese Forderung that-

*) A. a. O.; aus der Einleitung seiner Arbeit ist ersichtlich, dass die Priorität für seine Auffassung im Grunde Herrn G. Cantor zukommt.

sächlich erfüllbar ist. Genau ebenso werden wir das unter (8) definirte Zahlzeichen oder die durch die Reihen (7) bestimmte Zahl als den Ausdruck einer bestimmten Forderung auffassen können, nämlich der Forderung, die beiden gegen einander convergirenden Zahlenreihen gleichzeitig unbegrenzt fortzusetzen oder zu durchlaufen.

Der eigentliche Unterschied zwischen der Heine'schen Auffassung der Zahl als das Zahlzeichen (8) und der zuvor erwähnten Auffassung dürfte dann so ausgesprochen werden können: Während wir hier die Zahl als den Ausdruck der genannten Forderung *selbst* definiren, setzt jene Auffassung, nach der sie der gemeinsame Grenzwerth beider Reihen (7) ist, die Zahl als das Resultat der geforderten Operation, als dasjenige fest, zu dem man gelangen würde, wenn man die Forderung erfüllte oder erfüllen, nämlich die Werthreihen ins Unendliche durchlaufen könnte. Diese Festsetzung enthält aber, wie bemerkt, eine Behauptung oder eine Annahme, welche sich nie erweisen lässt, während die Heine'sche von allem Hypothetischen frei ist.

5. Gleichviel nun, ob man den allgemeineren Zahlenbegriff in der angegebenen Weise nur rein formell oder als das Zahlzeichen (8) definirt, oder den von uns angegebenen realen Sinn damit verbinden will, eins bleibt noch zu erörtern, inwiefern man nämlich berechtigt sei, das so Definirte als eine Zahl zu charakterisiren. Zu diesem Zwecke suchen wir klar zu stellen, was bei der Erweiterung des rationalen Zahlenbegriffes noch unter Zahl verstanden werden kann und soll.

Zunächst dürfen wir natürlich nicht verlangen, dass der erweiterte Zahlenbegriff unter die üblichen Definitionen des gewöhnlichen sich einbegreifen lasse; aber umgekehrt muss die rationale Zahl als besonderer Fall in dem erweiterten Zahlenbegriffe enthalten sein. Dieser Forderung nun genügt der Heine'sche allgemeine Zahlenbegriff, denn es ist bemerkt worden, dass jede rationale Zahl als gemeinsamer Grenzwerth zweier gegen einander convergirender Zahlenreihen aufgefasst werden kann. Bedenken wir ferner, dass der alleinige Zweck der Erweiterung des Zahlenbegriffes, schon beim ersten Schritte über die positiven ganzen Zahlen hinaus,

nur der ist, gewisse Rechnungen allgemein ausführbar zu machen, die mit den Zahlen engeren Sinnes allein nicht möglich sind, so darf das wesentliche Merkmal der Zahlen überhaupt darin gesetzt werden, dass sich mit ihnen rechnen lässt, d. h. dass zwei solche Elemente nach bestimmten Regeln wieder zu einem Elemente derselben Art verknüpft werden können. Die für die engere Gattung der rationalen Zahlen fundamentalen Regeln sind die vier Species, die Addition, Subtraction, Multiplication und Division, die bei den rationalen Zahlen in der That (wenigstens nach Ausschluss der Null, welche nur uneigentlich eine Zahl ist) stets wieder eine rationale Zahl liefern.

Wenn wir also jetzt den allgemeineren Zahlenbegriff, wie oben, festsetzen, so müssen wir, um das Definirte wirklich als Zahl bezeichnen zu dürfen, Regeln angeben können, wie zwei solche Zahlen mit einander zu einer dritten verknüpft werden können, die als ihre Summe, Differenz, Produkt oder Quotient angesehen werden darf; damit sie das darf, wird aber nur erforderlich sein, dass, so oft die verknüpften Zahlen rational sind, auch wirklich ihre richtige Summe u. s. w. nach jenen Regeln entsteht; denn die für die allgemeinere Gattung der Zahlen giltigen Regeln müssen selbstverständlich auch für die darin enthaltene besondere Art richtig bleiben.

Wir werden uns bei dieser Betrachtung auf das für unseren Zweck, bei dem es uns nicht auf Vollständigkeit ankommt, Ausreichende beschränken, indem wir voraussetzen, dass die Zahlen beider gegen einander convergirenden Zahlenreihen sämmtlich positiv sind; die Zahl ε wird dann auch als positiver Werth bezeichnet werden dürfen.

Sei nun

$$\zeta = \begin{pmatrix} \alpha_1, & \alpha_2, & \alpha_3, & \cdots & \alpha_i, & \cdots \\ \beta_1, & \beta_2, & \beta_3, & \cdots & \beta_i, & \cdots \end{pmatrix}$$

oder kürzer

$$\zeta = \begin{pmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \end{pmatrix}$$

eine zweite durch die im Symbol enthaltenen zwei gegen einander convergirenden Zahlenreihen, von denen die obere die an-, die untere die absteigende sei, definirte positive Zahl, so

überzeugt man sich zuerst ohne Mühe, dass dann auch sowohl die beiden Zahlenreihen

$$(9) \qquad \begin{cases} a_1 + \alpha_1, & a_2 + \alpha_2, & a_3 + \alpha_3, & \cdots \\ b_1 + \beta_1, & b_2 + \beta_2, & b_3 + \beta_3, & \cdots \end{cases}$$

als auch die beiden Reihen

$$(10) \qquad \begin{cases} a_1 - \beta_1, & a_2 - \beta_2, & a_3 - \beta_3, & \cdots \\ b_1 - \alpha_1, & b_2 - \alpha_2, & b_3 - \alpha_3, & \cdots \end{cases}$$

als auch endlich die beiden Reihen

$$(11) \qquad \begin{cases} a_1\alpha_1, & a_2\alpha_2, & a_3\alpha_3, & \cdots \\ b_1\beta_1, & b_2\beta_2, & b_3\beta_3, & \cdots \end{cases}$$

je zwei gegen einander convergirende Zahlenreihen sind. Um dies z. B. von der letzten zu zeigen, so folgt aus den charakteristischen Ungleichheiten, nach welchen

$$b_i > b_{i+1} > a_{i+1} > a_i$$
$$\beta_i > \beta_{i+1} > \alpha_{i+1} > \alpha_i$$

ist, um so mehr auch

$$b_i\beta_i > b_{i+1}\beta_{i+1} > a_{i+1}\alpha_{i+1} > a_i\alpha_i;$$

und da $b_i - a_i$ und $\beta_i - \alpha_i$ mit wachsendem Index i unter jeden Grad von Kleinheit herabsinken und

$$b_i\beta_i - a_i\alpha_i = b_i(\beta_i - \alpha_i) + \alpha_i(b_i - a_i)$$

gesetzt werden kann, so gilt dasselbe von $b_i\beta_i - a_i\alpha_i$, weil α_i, b_i endlich, jenes nämlich stets zwischen α_1 und β_1, dieses zwischen a_1, b_1 enthalten bleiben. Diesem zufolge sind die gedachten zwei Zahlenreihen (11) gegen einander convergirend.

Hiernach wollen wir nun die Grenzwerthe der drei Paare gegen einander convergirender Zahlenreihen (9), (10), (11), d. h. die — nach unserer Festsetzung — ihnen entsprechenden Zahlen resp. als Summe, Differenz und Produkt der beiden Zahlen z, ζ definiren, also setzen:

$$(12) \qquad \begin{cases} z + \zeta = \begin{pmatrix} a_i + \alpha_i \\ b_i + \beta_i \end{pmatrix}, \quad z - \zeta = \begin{pmatrix} a_i - \beta_i \\ b_i - \alpha_i \end{pmatrix} \\ z \cdot \zeta = \begin{pmatrix} a_i\alpha_i \\ b_i\beta_i \end{pmatrix}. \end{cases}$$

6. Es ist leicht einzusehen, dass diese Definitionen der Forderung genügen, auch in dem Falle giltig zu bleiben, dass

die Zahlen ε und ζ rationale Zahlen sind. Denn liegt eine rationale Zahl ε stets zwischen a_i und b_i, eine andere ζ stets zwischen α_i und β_i, so liegen selbstverständlich $\varepsilon + \zeta$, $\varepsilon - \zeta$, $\varepsilon\zeta$ resp. zwischen den sich entsprechenden Gliedern der gegen einander convergirenden Zahlenreihen (9), (10), (11), und können demnach als mit ihren Grenzwerthen übereinstimmend definirt werden.

Bei der Differenz

$$\varepsilon - \zeta = \begin{pmatrix} a_i - \beta_i \\ b_i - \alpha_i \end{pmatrix}$$

sind mehrere Fälle möglich. Aus den Ungleichheiten

$$b_i - \alpha_i > b_{i+1} - \alpha_{i+1} > a_{i+1} - \beta_{i+1} > a_i - \beta_i,$$

welche bei ihr bestehen, folgt zuerst, dass, wenn $b_i - \alpha_i$ für einen bestimmten Werth des Index negativ ist, es auch für alle grösseren Werthe desselben so bleibt, und um so mehr dann auch $a_i - \beta_i$; dann sind also die sämmtlichen Zahlen der beiden Zahlenreihen von einer bestimmten Stelle an negativ, und demnach ist dann auch $\varepsilon - \zeta$ als eine negative Zahl anzusehen und man nennt $\varepsilon < \zeta$. Wird zweitens $b_i - \alpha_i$ niemals negativ, so ist es vom Anfang an und dauernd positiv; ist dann gleichzeitig $a_i - \beta_i$ wenigstens von einer bestimmten Stelle an positiv, so wird man auch $\varepsilon - \zeta$ als eine positive Zahl anzusehen haben, und man nennt $\varepsilon > \zeta$. Wenn dagegen $a_i - \beta_i$ niemals positiv wird, sondern dauernd — und vom Anbeginn — negativ bleibt, so haben wir drittens zwei Zahlenreihen, eine ansteigende, aus negativen Zahlen bestehende, und eine absteigende, aus positiven Zahlen gebildete Reihe, welche demnach die Null immer zwischen sich fassen, und welche ihr auch unendlich nahe kommen, weil der Unterschied zwischen zwei sich entsprechenden Gliedern beider Reihen unter jeden Grad von Kleinheit herabsinkt. In diesem Falle also wird der gemeinsame Grenzwerth der beiden Zahlenreihen die Null sein, man hat $\varepsilon - \zeta = 0$, oder die beiden Zahlen ε, ζ sind einander gleich: $\varepsilon = \zeta$.

So oft überhaupt die Null als Grenzwerth zweier gegen einander convergirender Zahlenreihen dargestellt wird, muss die ansteigende Reihe aus negativen, die absteigende Reihe

aus positiven Zahlen bestehen, welche unter jeden Grad von Kleinheit herabsinken. Denn, würde z. B. die ansteigende Reihe an einer bestimmten Stelle positiv, so würde sie dauernd es bleiben und sich von der Null entfernen, während die absteigende ihr nicht unendlich nahe kommt, da ihre Glieder über den entsprechenden der absteigenden Reihe bleiben. Die Null wird also nicht von den Reihen eingeschlossen, sie kann nicht ihr gemeinsamer Grenzwerth sein, der vielmehr als eine positive Zahl angesehen werden muss.

Setzen wir in der Differenz $z - \zeta$

$$a_i - \beta_i = -\delta_i, \quad b_i - \alpha_i = \varepsilon_i,$$

so sind, wenn $z = \zeta$, d. h. wenn

$$\begin{pmatrix} \beta_i - \delta_i \\ \alpha_i + \varepsilon_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \end{pmatrix}$$

ist, dem Obigen zufolge δ_i, ε_i positive Werthe, die mit wachsendem Index i unendlich klein werden, während stets $\delta_i + \varepsilon_i > \beta_i - \alpha_i$ bleibt, und man erhält umgekehrt die Gleichheit

$$\begin{pmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_i - \delta_i \\ \alpha_i + \varepsilon_i \end{pmatrix} \tag{13}$$

für die Grenzwerthe zweier Paare gegen einander convergirender Werthreihen, von denen das eine Paar α_i, β_i, das andere Paar $\beta_i - \delta_i$, $\alpha_i + \varepsilon_i$ zu entsprechenden Gliedern der an- und absteigenden Reihen hat, wenn δ_i, ε_i positive Werthe bedeuten, welche mit wachsendem i unendlich klein werden.

7. Nach diesen Bemerkungen über die Null, über die Gleichheit zweier Zahlen, und wie sie, falls sie ungleich sind, nach der Grösse geordnet zu denken sind, können wir uns zur Definition des Quotienten wenden, die uns noch fehlt. Wir müssen dabei, gerade wie bei dem Quotienten rationaler Zahlen, voraussetzen, dass der Divisor, er sei ζ, von Null verschieden sei, d. h. also, dass die Zahlen α_i, β_i, welche, wie oben, positiv angenommen werden, nicht mit wachsendem Index unendlich klein werden. Sie bleiben demnach, wie gross i auch werde, jedenfalls immer über einer gewissen endlich angebbaren Zahl γ. Wir definiren nun den Quotienten $\frac{z}{\zeta}$ durch die Gleichheit:

$$(14) \qquad \frac{z}{\zeta} = \begin{pmatrix} \frac{a_i}{\beta_i} \\ \frac{b_i}{\alpha_i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a_1}{\beta_1}, & \frac{a_2}{\beta_2}, & \frac{a_3}{\beta_3}, & \cdots \\ \frac{b_1}{\alpha_1}, & \frac{b_2}{\alpha_2}, & \frac{b_3}{\alpha_3}, & \cdots \end{pmatrix}$$

und haben, um dies als zulässig zu erweisen, offenbar nur zu zeigen, dass die in Parenthesen gesetzten beiden Zahlreihen gegen einander convergirende sind; dass die Definition dann auch für rationale z, ζ giltig bleibt, ersieht man, wie bei den drei anderen Operationen, von selbst. Jene Convergenz aber erkennt man daraus, dass

erstens, weil $b_i > a_i$, $\beta_i > \alpha_i$ also $\frac{1}{\alpha_i} > \frac{1}{\beta_i}$ ist, auch $\frac{b_i}{\alpha_i} > \frac{a_i}{\beta_i}$ ist; dass

zweitens, weil $b_{i+1} < b_i$, $\alpha_{i+1} > \alpha_i$ also $\frac{1}{\alpha_{i+1}} < \frac{1}{\alpha_i}$ ist, auch $\frac{b_{i+1}}{\alpha_{i+1}} < \frac{b_i}{\alpha_i}$, die untere Reihe also eine absteigende ist; dass ebenso

drittens, weil $a_{i+1} > a_i$, $\beta_{i+1} < \beta_i$ also $\frac{1}{\beta_{i+1}} > \frac{1}{\beta_i}$ ist, auch $\frac{a_{i+1}}{\beta_{i+1}} > \frac{a_i}{\beta_i}$, die obere Reihe also eine ansteigende ist; und dass endlich

viertens die Differenz zweier sich entsprechender Glieder

$$\frac{b_i}{\alpha_i} - \frac{a_i}{\beta_i} = \frac{b_i\beta_i - a_i\alpha_i}{\alpha_i\beta_i}$$

mit wachsendem Index i unendlich klein wird, indem der Nenner zuletzt stets grösser bleibt als γ^2, während der Zähler, wie schon früher gezeigt worden, gegen Null convergirt.

8. Nachdem in solcher Weise die vier Species für die Zahlen in erweitertem Sinne so festgestellt worden sind, dass sie auch giltig bleiben, d. h. mit den gewöhnlichen vier Species übereinkommen, so oft die verknüpften Elemente der Rechnung rational sind, dürfen wir nunmehr, dem Gesagten zufolge, das durch zwei gegen einander convergirende Zahlenreihen Definirte und als ihr gemeinsamer Grenzwerth Bezeichnete in der That als eine Zahl auffassen. Aber, weil sie nur in besonderen Fällen rational ist, werden wir sie in den

übrigen Fällen irrational nennen müssen; die rationalen und irrationalen Zahlen, welche wir so unter einem gemeinsamen Gesichtspunkte zusammengefasst haben, bilden mit einander das Gebiet aller reellen Zahlen.

Eine vollständige Arithmetik der reellen Zahlen müsste nun noch zeigen, dass die fundamentalen Rechnungsregeln, welche für rationale Zahlen gelten, auch in Bestand bleiben für die allgemeinere Zahlengattung, welche sie als besondere Art umfasst; z. B., wenn für ein drittes Paar gegen einander convergirender Zahlenreihen der Grenzwerth $\mathfrak{z}$ heisst, etwa

$$\mathfrak{z} = \binom{a_i}{b_i},$$

wo also a_i, b_i die sich entsprechenden Glieder der an- und absteigenden Reihe sind, so müsste der bekannte Multiplikationssatz

$$(\mathfrak{z} \pm \xi) \cdot \mathfrak{z} = \mathfrak{z}\mathfrak{z} \pm \xi\mathfrak{z}$$

nachweisbar sein. Wir wollen diesen Nachweis z. B. für das untere Vorzeichen wirklich erbringen. Da

$$\mathfrak{z} - \xi = \binom{a_i - \beta_i}{b_i - \alpha_i}$$

ist, liefert die Definition des Produktes zunächst

$$(\mathfrak{z} - \xi) \cdot \mathfrak{z} = \binom{a_i a_i - \beta_i a_i}{b_i b_i - \alpha_i b_i}, \tag{15}$$

während

$$\mathfrak{z}\mathfrak{z} = \binom{a_i a_i}{b_i b_i}, \qquad \xi\mathfrak{z} = \binom{\alpha_i a_i}{\beta_i b_i}$$

also nach der Definition der Differenz

$$\mathfrak{z}\mathfrak{z} - \xi\mathfrak{z} = \binom{a_i a_i - \beta_i b_i}{b_i b_i - \alpha_i a_i} \tag{16}$$

ist. Aber die allgemeinen Glieder in dem Symbole der Formel (16) lassen sich folgendermassen schreiben:

$$a_i a_i - \beta_i b_i = (b_i b_i - \alpha_i b_i) - b_i(\beta_i - \alpha_i) - (b_i b_i - a_i a_i)$$
$$b_i b_i - \alpha_i a_i = (a_i a_i - \beta_i a_i) + a_i(\beta_i - \alpha_i) + (b_i b_i - a_i a_i),$$

unterscheiden sich also von denen des Symbols in der Formel (15) um die Werthe

$$-\delta_i = -\mathfrak{b}_i(\beta_i - \alpha_i) - (b_i\mathfrak{b}_i - a_i\mathfrak{a}_i)$$
$$+\varepsilon_i = +\mathfrak{a}_i(\beta_i - \alpha_i) + (b_i\mathfrak{b}_i - a_i\mathfrak{a}_i),$$

welche, die ersteren negativ, die zweiten positiv, mit wachsendem i gegen Null convergiren; das Symbol (16) hat mit andern Worten die Gestalt:

$$\begin{pmatrix}(b_i\mathfrak{b}_i - \alpha_i\mathfrak{b}_i) - \delta_i\\ (a_i\mathfrak{a}_i - \beta_i\mathfrak{a}_i) + \varepsilon_i\end{pmatrix}$$

und bezeichnet daher, nach dem durch die Gleichung (13) ausgesprochenen Satze, denselben Werth, wie das Symbol (15).

Weiter wollen wir nicht gehen; es kam uns nur darauf an, zu zeigen, wie die irrationalen Zahlen genau zu definiren sind, und ihren Charakter als Zahlen wissenschaftlich zu begründen. Dies glauben wir durch das Gesagte ausreichend geleistet zu haben.

Wir wollen nur noch, um auf unsern Ausgangspunkt zurückzukommen, bemerken, dass durch die von uns eingeführten allgemeineren oder irrationalen Zahlen nun wirklich auch der Zweck erreicht wird, die Gleichung $x^2 = 13$ z. B. auflösbar zu machen. Denn bezeichnet man mit x die durch die zwei gegen einander convergirenden Zahlenreihen (6) bestimmte Zahl, so ist der gegebenen Definition des Produktes gemäss x^2 diejenige Zahl, welche den aus den Quadraten der in (6) auftretenden Zahlen gebildeten beiden Reihen entspricht, zwischen deren zusammengehörigen Gliedern aber, wie dort bemerkt, die rationale Zahl 13 stets enthalten bleibt, sodass auch sie als ihr gemeinsamer Grenzwerth aufzufassen und demnach $x^2 = 13$ ist.

Zweite Vorlesung.

Ueber algebraische Zahlen.

1. Wir kehren zum Ausgangspunkte der vorigen Betrachtungen nunmehr zurück, um zu fragen, ob die von uns eingeführten irrationalen Zahlen geeignet und hinreichend

sind, alle Gleichungen, wie die Gleichung (5) voriger Vorlesung zu lösen. Anscheinend nicht; denn z. B. kann man für die Gleichung

$$x^2 + 1 = 0$$

weder einen ganzen noch auch einen rationalen Werth x angeben, der sie auch nur mit irgend einer Annäherung löste, sodass es also offenbar auch nicht gelingen kann, mittels solcher unendlich fortgesetzten Annäherung einen Grenzwerth zu bestimmen, der sie wirklich erfüllte. Die genannte Gleichung hat keine reelle Wurzel. Es ist nun aber das Verdienst von Gauss, zuerst den strengen Beweis erbracht zu haben, dass jede algebraische Gleichung von der Form

$$(1) \qquad x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \cdots + A_m = 0$$

wenigstens *dann* eine Lösung hat, wenn man ausser den *reellen* Zahlen auch die sogenannten *complexen* Zahlen zulässt, d. h. die Zahlen von der Form $a + bi$, worin i zur Abkürzung steht für das imaginäre Symbol $\sqrt{-1}$, während a, b reelle Werthe bedeuten. Diese letzteren lassen sich mit beliebiger Annäherung berechnen, besser gesagt, es lassen sich für a sowohl wie für b je zwei gegen einander convergirende Zahlenreihen ermitteln, wie sie im Vorigen betrachtet worden sind, als deren Grenzwerthe a, b anzusehen sind. Die mehr oder weniger zweckmässigen Mittel und Wege hierzu sind zuerst von Lagrange, Fourier und später von Vielen gesucht und angegeben worden und bilden den Gegenstand der sogenannten numerischen Auflösung der Gleichungen. Uns ist es nicht möglich, näher hier darauf einzugehen, es muss uns vielmehr genügen, dass die Gleichung (1) in solcher Weise stets gelöst werden kann auf Grund der zuvor gegebenen Definition der irrationalen Zahlen; und die somit wirklich vorhandenen Lösungen der Gleichungen von jener Form nennen wir, wie schon gesagt, algebraische Zahlen. Sie sind, wie unschwer zu sehen, genau denselben allgemeinen Rechnungsregeln unterworfen wie die reellen Zahlen; jedes Lehrbuch über complexe Grössen bringt darüber das nothwendige; hier wollen wir nur zwei allgemeine Sätze von

algebraischen Zahlen beweisen, welche für die Erkenntniss der Natur solcher Zahlen von Wichtigkeit sind.

2. Seien α, β *zwei* algebraische Zahlen, nämlich α eine Wurzel der Gleichung

$$(1) \qquad x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \cdots + A_m = 0,$$

β eine Wurzel der Gleichung

$$(2) \qquad x^n + B_1 x^{n-1} + B_2 x^{n-2} + \cdots + B_n = 0$$

mit rationalen Coefficienten, so wird auch jeder rational aus α und β gebildete Ausdruck eine algebraische Zahl sein. Wir zeigen dies zunächst für die drei Ausdrücke $\alpha + \beta$, $\alpha - \beta$, $\alpha \cdot \beta$.*)

Bezeichnen wir hierzu das Produkt mn kurz durch p, und mit $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \cdots \omega_p$ die p Produkte aus jeder der Potenzen

$$1, \alpha, \alpha^2, \cdots \alpha^{m-1}$$

mit jeder der Potenzen

$$1, \beta, \beta^2, \cdots \beta^{n-1},$$

welche also sämmtlich die Form $\alpha^\mu \beta^\nu$ haben, während μ, ν kleiner sind als m, n resp. Nun sei ω irgend eine der Grössen $\alpha + \beta$, $\alpha - \beta$, $\alpha \cdot \beta$; dann lässt sich jedes der Produkte

$$\omega\omega_1, \omega\omega_2, \omega\omega_3, \cdots \omega\omega_p$$

auf lineare Weise durch die Grössen $\omega_1, \omega_2, \cdots \omega_p$, nämlich in der Form

$$(3) \qquad k_1\omega_1 + k_2\omega_2 + \cdots + k_p\omega_p$$

mit rationalen Coefficienten k_i ausdrücken. In der That sei ω etwa der Ausdruck $\alpha + \beta$, so findet sich

$$(4) \qquad (\alpha + \beta) \cdot \alpha^\mu \beta^\nu = \alpha^{\mu+1} \cdot \beta^\nu + \alpha^\mu \cdot \beta^{\nu+1}$$

und es sind vier Fälle möglich:

entweder ist $\mu < m - 1$, $\nu < n - 1$; dann ist die rechte Seite der Gleichung (4) die Summe zweier der Grössen $\omega_1, \omega_2, \cdots \omega_p$, die Behauptung also erwiesen;

*) Dieser und der in der folgenden Nummer enthaltene allgemeine Satz und die mitgetheilten Beweise finden sich in Dedekind, sur la théorie des nombres entiers algébriques, Paris 1877 (extrait du Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 1. série t. XI et 2. série t. I) pag. 60.

oder es ist $\mu = m - 1$, $\nu < n - 1$; dann gehört das zweite Glied rechts zu den Grössen ω_i, das erste aber kann mittels der Identität

$$\alpha^m + A_1\alpha^{m-1} + A_2\alpha^{m-2} + \cdots + A_m = 0$$

auf die Form

$$-A_1 \cdot \alpha^{m-1}\beta^\nu - A_2 \cdot \alpha^{m-2}\beta^\nu - \cdots - A_m \cdot \alpha^0\beta^\nu$$

gebracht, d. h. als ein linearer Ausdruck mittels einiger der Grössen ω_i und rationalen Coefficienten dargestellt werden, womit wieder die Behauptung erwiesen ist;

oder es ist $\mu < m - 1$, $\nu = n - 1$, dann führt die Identität

$$\beta^\nu + B_1\beta^{\nu-1} + B_2\beta^{\nu-2} + \cdots + B_n = 0$$

zu dem gleichen Ziele;

oder endlich es ist $\mu = m - 1$, $\nu = n - 1$; dann bedarf es nur der Anwendung dieser beiden Identitäten, um die Behauptung als richtig zu beweisen. Da nun die gleichen Betrachtungen auch gelten, wenn ω die Differenz $\alpha - \beta$ oder das Produkt $\alpha\beta$ bedeutet, so lassen sich in allen drei Fällen p Gleichungen aufstellen:

$$\begin{aligned}
\omega\omega_1 &= k_1'\omega_1 + k_2'\omega_2 + \cdots + k_p'\omega_p \\
\omega\omega_2 &= k_1''\omega_1 + k_2''\omega_2 + \cdots + k_p''\omega_p \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\omega\omega_p &= k_1^p\omega_1 + k_2^p\omega_2 + \cdots + k_p^p\omega_p,
\end{aligned}$$

deren sämmtliche Coefficienten k_i^h rational sind, und denen man auch die Gestalt geben kann:

$$(5)\qquad \begin{cases}
0 = (k_1' - \omega)\cdot\omega_1 + k_2'\omega_2 + \cdots + k_p'\omega_p \\
0 = k_1''\omega_1 + (k_2'' - \omega)\cdot\omega_2 + \cdots + k_p''\omega_p \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
0 = k_1^p\omega_1 + k_2^p\omega_2 + \cdots + (k_p^p - \omega)\cdot\omega_p.
\end{cases}$$

Hier müssen wir nun den Begriff einer Determinante und die einfachsten Sätze über sie voraussetzen. Da die Grössen ω_i nicht sämmtlich Null sind, denn unter ihnen befindet sich auch das Produkt $1 \cdot 1$, so muss, einem solchen Satze zufolge, die Determinante der Gleichungen (5), nämlich der Ausdruck

$$\begin{vmatrix} k_1' - \omega, & k_2', & \cdots & k_p' \\ k_1'', & k_2'' - \omega, & \cdots & k_p'' \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ k_1^p, & k_2^p, & \cdots & k_p^p - \omega \end{vmatrix}$$

gleich Null sein. Das giebt aber, wenn die Determinante entwickelt wird, eine Gleichung von der Form

$$\omega^p + k_1\omega^{p-1} + k_2\omega^{p-2} + \cdots k_p = 0, \tag{6}$$

deren Coefficienten k_i aus den Grössen k_i^h durch Additionen, Subtraktionen oder Multiplikationen gebildet sind, nothwendig also, eben sowohl wie die k_i^h selbst, rational sind. Mit andern Worten: ω, d. h. jede der drei Grössen $\alpha + \beta$, $\alpha - \beta$, $\alpha\beta$, ist eine algebraische Zahl.

Nebenbei wollen wir bemerken, dass, so oft die A_i und B_i ganze Zahlen, d. h. so oft α und β ganze algebraische Zahlen sind, auch die Coefficienten k_i^h den obigen Erörterungen über die Produkte $\omega\omega_i$ gemäss ganze Zahlen sein werden. In diesem Falle werden demnach auch die Zahlen k_i ganze Zahlen und ω wird eine ganze algebraische Zahl sein. So gewinnt man den Zusatz: Die Summe, die Differenz und das Produkt zweier ganzen algebraischen Zahlen ist wieder eine ganze algebraische Zahl.

Gehen wir zu unserm eigentlichen Vorhaben zurück, so können wir weiter bemerken, dass, wenn α eine von 0 verschiedene algebraische Zahl ist, dasselbe auch von $\frac{1}{\alpha}$ gilt. Denn ist α eine Wurzel der Gleichung (1), also

$$\alpha^m + A_1\alpha^{m-1} + A_2\alpha^{m-2} + \cdots + A_{m-1}\alpha + A_m = 0,$$

so ist

$$\left(\frac{1}{\alpha}\right)^m + \frac{A_{m-1}}{A_m}\cdot\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{m-1} + \cdots + \frac{A_1}{A_m}\cdot\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{A_m} = 0,$$

wo die Division mit A_m gestattet war, weil A_m nicht 0 sein kann, wenn es α nicht ist; d. h. $\frac{1}{\alpha}$ ist Wurzel der Gleichung

$$x^m + \frac{A_{m-1}}{A_m}x^{m-1} + \cdots + \frac{A_1}{A_m}x + \frac{1}{A_m} = 0$$

mit rationalen Coefficienten, w. z. b. w.

Verbindet man diese Bemerkung mit dem zuvor Bewiesenen, so leuchtet ein, dass auch $\frac{\beta}{\alpha}$ eine algebraische Zahl sein muss. Und da jeder aus α und β rational zusammengesetzte Ausdruck entsteht, indem man eine Anzahl Additionen, Subtraktionen, Multiplikationen und Divisionen in gewisser Reihenfolge ausführt, so ist die Behauptung hiermit erwiesen: ein jeder Ausdruck dieser Art ist gleichfalls eine algebraische Zahl.

3. Der zweite allgemeine Satz, den wir beweisen wollen, lautet folgendermassen: Wenn ω Wurzel einer algebraischen Gleichung ist, deren Coefficienten algebraische Zahlen sind, so ist ω selbst eine algebraische Zahl.

Denn besteht die Identität

$$\omega^n + \alpha\omega^{n-1} + \beta\omega^{n-2} + \cdots + \gamma = 0,$$

in welcher $\alpha, \beta, \cdots \gamma$ algebraische Zahlen sind, der Art, dass folgende Identitäten stattfinden:

$$\begin{aligned}
\alpha^a + A_1\alpha^{a-1} + \cdots + A_a &= 0\\
\beta^b + B_1\beta^{b-1} + \cdots + B_b &= 0\\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ &\\
\gamma^c + C_1\gamma^{c-1} + \cdots + C_c &= 0,
\end{aligned}$$

in denen die Coefficienten sämmtlich rationale Zahlen sind, und bezeichnet man das Produkt $nab\cdots c$ wieder zur Abkürzung mit p, mit $\omega_1, \omega_2, \cdots \omega_p$ aber die sämmtlichen Produkte von der Form:

$$\omega^{n'} \cdot \alpha^{a'} \cdot \beta^{b'} \cdots \gamma^{c'},$$

in denen die Exponenten resp. kleiner sind als $n, a, b, \cdots c$, so überzeugt man sich ohne Mühe genau wie bei dem Beweise des vorigen Satzes, indem man nur die obigen Identitäten verwendet, dass die p Produkte

$$\omega\omega_1, \quad \omega\omega_2, \quad \cdots \quad \omega\omega_p$$

sämmtlich auf die Form

$$k_1\omega_1 + k_2\omega_2 + \cdots + k_p\omega_p$$

gebracht werden können, während die k_i durch Additionen, Subtraktionen und Multiplikationen aus den $A_i, B_i, \cdots C_i$

entstehen und demnach rational sind. Das giebt wieder p Gleichungen von der Gestalt (5) und als Folgerung eine Gleichung von der Form (6), welche eben zeigt, dass ω eine algebraische Zahl ist.

In dem besonderen Falle, wo $\alpha, \beta, \cdots \gamma$ sämmtlich ganze algebraische Zahlen sind, sind die Coefficienten A_i, $B_i, \cdots C_i$ sämmtlich ganze Zahlen; dem eben Gesagten zufolge werden dann auch sämmtliche Coefficienten in den Gleichungen (5) ganze Zahlen sein, und, wie im vorigen Satze, dasselbe auch gelten von den Coefficienten der Gleichung (6). Hieraus schliesst man den Zusatz: Die Wurzel einer Gleichung, deren Coefficienten *ganze* algebraische Zahlen sind, ist selbst eine *ganze* algebraische Zahl.

Aus dem zweiten der hier bewiesenen allgemeinen Sätze geht hervor, dass eine Zahl durch die Bestimmung, Wurzel einer Gleichung zu sein, deren Coefficienten algebraische Zahlen sind, nicht allgemeiner definirt ist, als durch die Bestimmung, einer Gleichung zu genügen mit rationalen Coefficienten; diese letztere Definition umfasst vielmehr die erstere und kann als die allgemeinste Definition algebraischer Zahlen angesehen werden.

4. Hier lässt sich nun sogleich die Frage aufwerfen, ob die sämmtlichen möglichen Irrationalzahlen, wie sie in voriger Vorlesung eingeführt worden sind und wir sie in dieser Vorlesung nach Gauss noch durch die complexen Zahlen ergänzt haben, unter diese Definition mit einbegriffen sind, oder ob es, mit andern Worten, auch nichtalgebraische Zahlen giebt, welche dann als transcendente Zahlen bezeichnet werden könnten?

Aber eine andere Frage liegt fast noch näher. Bleiben wir bei den algebraischen Zahlen, so können wir ihre Gesammtheit eintheilen nach dem Grade der Gleichung, durch welche sie definirt sind, und können so Irrationellen verschiedener Grade, quadratische, kubische, biquadratische u. s. w. Irrationellen unterscheiden. Das ist aber ein algebraischer Gesichtspunkt und Unterschied, und es entsteht die Frage, welche rein arithmetischen Unterschiede

finden statt zwischen diesen Irrationellen verschiedener Grade? welches sind die arithmetischen Kennzeichen, durch welche die Irrationellen der verschiedenen Grade sich von einander scheiden und einzeln erkennbar sind?

Die erste dieser beiden Fragen ist bereits von der Wissenschaft vollkommen befriedigend beantwortet und von Liouville der Nachweis geliefert worden, dass es in der That auch transcendente Zahlen giebt. In dieser Hinsicht forderten besonders zwei Zahlen die Untersuchung der Mathematiker heraus, die beiden, gewöhnlich mit e und π bezeichneten Zahlen, d. i. die Basis des natürlichen Logarithmensystemes und die Ludolph'sche Zahl, welche den Umfang eines Kreises vom Durchmesser 1 misst. In neuester Zeit erst ist es den Bemühungen von Hermite und von Lindemann gelungen, diese höchst anziehende, wichtige Frage zu lösen: Die Zahlen e und π sind transcendent.

Sehr weit entfernt scheint man dagegen noch von der Lösung der zweiten Frage zu sein. Schon seit geraumer Zeit zwar kennt man ein arithmetisches Kennzeichen für die quadratischen Irrationellen, auch haben andere Untersuchungen die Vermuthung eines ähnlichen Kennzeichens auch für Irrationellen höheren Grades, wenigstens für die kubischen, sehr wahrscheinlich gemacht; aber noch hat man im Grunde ihre verschiedene Natur sehr wenig zu erforschen vermocht. Wenn wir dennoch mit der zweiten Frage beginnen, so geschieht es deshalb, weil jene Untersuchungen sich auf Rechnungen der höheren Analysis gründen und grössere Vorkenntnisse erfordern, während das, was über quadratische Irrationellen herzuleiten ist, nur auf sehr einfachen arithmetischen Betrachtungen beruht; die Besprechung der Irrationellen höherer Ordnung lassen wir bis zum Schlusse der Vorlesungen.

Das Kennzeichen quadratischer Irrationellen ist auch im Grunde so bekannt, dass wir Anstand nehmen müssten, es hier ausführlich herzuleiten, wenn diese Herleitung nicht an sich ein ausreichendes Interesse darböte. Sie steht aber, wie wohl zuerst Lagrange gezeigt hat*), im engsten Zusammen-

*) S. Additions zu Euler, élémens d'Algèbre, traduits de l'allemand, avec des notes et des additions, Pétersb. et Paris 1798, § II: mé-

hange mit der wichtigen Theorie der quadratischen Formen, und so werden wir sie, im Anschluss an die Gedanken von Lagrange, in der Folge darstellen. Zugleich aber bringen wir ihre allgemeine, noch bekanntere Grundlage, die Theorie der Kettenbrüche, zu dem Zwecke zur Darstellung, einen Algorithmus sogleich in seiner einfachsten Art zu lehren, dessen Verallgemeinerung, wie sie zuerst Jacobi betrachtet hat, die richtige Grundlage sein dürfte, um über die Natur der Irrationellen höheren Grades zur Erkenntniss zu kommen.

Dritte Vorlesung.

Die Kettenbrüche.

1. Sind a, a_1 zwei positive Werthe, so kann man stets die Gleichung ansetzen:

$$a = p_0 a_1 + a_2,$$

worin p_0 das grösste in dem Verhältnisse $\frac{a}{a_1}$ enthaltene Ganze, a_2 aber den Rest bezeichnet, welcher bei der Division von a durch a_1 erübrigt. Es ist demnach p_0 eine positive ganze Zahl oder Null, je nachdem $\frac{a}{a_1}$ grösser oder kleiner als die Einheit ist, und a_2 ein positiver Werth kleiner als a_1. Wird nun mit a_1, a_2 in gleicher Weise verfahren und dieselbe Rechnung weiter fortgesetzt, so ergiebt sich eine Reihe von Gleichungen wie folgt:

$$(1) \qquad \begin{cases} a = p_0 a_1 + a_2 \\ a_1 = p_1 a_2 + a_3 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{i-1} = p_{i-1} a_i + a_{i+1} \end{cases}$$

in welcher a_1, a_2, a_3, $\cdots$ abnehmende positive Werthe, p_1, p_2, p_3, $\cdots$ aber sämmtlich positive ganze Zahlen bezeichnen.

---

thodes pour déterminer les nombres entiers, qui donnent les minima des formules indéterminées à deux inconnues.

Zwei wesentlich verschiedene Fälle können sich darbieten: entweder ist das Verhältniss $\frac{a}{a_1}$ rational oder nicht. Im ersteren Falle können wir es dem Verhältnisse zweier positiven ganzen Zahlen ohne gemeinsamen Theiler, welche α, α_1 heissen mögen, gleichsetzen:

$$\frac{a}{a_1} = \frac{\alpha}{\alpha_1}. \tag{2}$$

Für die ganzen Zahlen α, α_1 muss die angedeutete Rechnung eine Reihe von Gleichungen ergeben von der Form:

$$\begin{cases} \alpha & = p_0\alpha_1 + \alpha_2 \\ \alpha_1 & = p_1\alpha_2 + \alpha_3 \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \alpha_{i-1} & = p_{i-1}\alpha_i \quad , \end{cases} \tag{3}$$

worin jetzt die Reste α_k eine abnehmende Reihe ganzer Zahlen bilden, welche nothwendig abbricht, sodass ein Rest — wir haben angenommen α_{i+1} — der Null gleich wird; der vorhergehende Rest α_i muss dann, da er offenbar gemeinsamer Theiler von α, α_1 ist, nach der Voraussetzung gleich 1 sein. Nun folgt aus (2) die Gleichheit der beiden Verhältnisse $\frac{a}{\alpha}$, $\frac{a_1}{\alpha_1}$; wird ihr gemeinsamer Werth q genannt und $q \cdot \alpha_k = a_k$ gesetzt, so ergiebt sich aus (3) folgende neue Reihe von Gleichungen:

$$\begin{cases} a & = p_0a_1 + a_2 \\ a_1 & = p_1a_2 + a_3 \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{i-2} & = p_{i-2}a_{i-1} + a_i \\ a_{i-1} & = p_{i-1}a_i \quad , \end{cases} \tag{1'}$$

welche für den vorliegenden Fall den Algorithmus (1) für die Zahlen a, a_1 darstellen, da $p_0, p_1, p_2, \cdots$ die grössten Ganzen bedeuten, die in den Verhältnissen $\frac{\alpha}{\alpha_1} = \frac{a}{a_1}$, $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{a_1}{a_2}$, $\cdots$ enthalten sind. Ist also $\frac{a}{a_1}$ ein rationales Verhältniss, so besteht der Algorithmus (1) nur aus einer endlichen Anzahl von Gleichungen von der Form (1').

Ist dagegen $\frac{a}{a_1}$ ein irrationales Verhältniss, so ist die Anzahl der Gleichungen (1) unbeschränkt; denn offenbar kann die Rechnung solange immer noch um eine Stelle weitergeführt werden, als keine der Zahlen $a_2, a_3, \cdots$ gleich Null wird, und dieser Fall kann jetzt nicht eintreten; denn würde z. B. $a_{i+1} = 0$, so würde aus der Gleichung $a_{i-1} = p_{i-1}a_i + a_{i+1}$ das Verhältniss $\frac{a_{i-1}}{a_i}$ und damit auch alle vorhergehenden Verhältnisse $\frac{a_{i-2}}{a_{i-1}}, \frac{a_{i-3}}{a_{i-2}}, \cdots$ bis zum letzten $\frac{a}{a_1}$, dies gegen die Voraussetzung, rational werden. Man kann hiernach in diesem Falle passend schreiben:

$$(1'') \qquad \begin{cases} a = p_0 a_1 + a_2 \\ a_1 = p_1 a_2 + a_3 \\ a_2 = p_2 a_3 + a_4 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{cases}$$

Für einen rationalen Werth $\frac{a}{a_1}$ findet man aus den Gleichungen (1′) durch successives Fortschaffen der Verhältnisse $\frac{a_1}{a_2}, \frac{a_2}{a_3}, \cdots$ seine Entwicklung in einen Kettenbruch:

$$\frac{a}{a_1} = p_0 + \frac{1}{p_1 + \frac{1}{p_2 + \cdots + \frac{1}{p_{i-1}}}},$$

wofür wir der grösseren Bequemlichkeit wegen das Symbol

$$(4) \qquad \frac{a}{a_1} = (p_0; p_1, p_2, \cdots p_{i-1})$$

setzen wollen. Dabei soll p_0, welches eine positive ganze Zahl oder die Null sein konnte, während alle andern p wesentlich positive ganze Zahlen waren, das Anfangsglied, die letztern die Theilnenner genannt werden, sodass der Satz gilt: Jede (positive) rationale Zahl kann in einen endlichen Kettenbruch entwickelt werden, dessen sämmtliche Theilnenner positive ganze Zahlen, dessen Theilzähler der positiven Einheit gleich sind.

Auch jede (positive) Irrationalzahl $\frac{a}{a_1}$ kann aus den Gleichungen (1″) in einen ähnlichen Kettenbruch entwickelt

werden, dessen Gliederzahl beliebig gross gemacht werden kann. Denn, bricht man die Reihe jener Gleichungen bei der Gleichung

$$a_{i-1} = p_{i-1}a_i + a_{i+1}$$

ab, so findet sich die Kettenbruchentwicklung:

$$\frac{a}{a_1} = \left(p_0;\ p_1,\ p_2,\ \cdots\ p_{i-1},\ \frac{a_i}{a_{i+1}}\right),$$

welche sich von der vorigen nur darin unterscheidet, dass zu den ganzzahligen Theilnennern ein Schlussnenner hinzutritt, der eine Irrationalzahl ist, worauf eben die Möglichkeit beruht, die Entwicklung, wenn man will, noch weiter fortzusetzen.

Die Brüche

$$(p_0) = \frac{p_0}{1}, \quad (p_0;\ p_1) = p_0 + \frac{1}{p_1},$$

$$(p_0;\ p_1,\ p_2) = p_0 + \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}$$

u. s. w., welche aus dem Kettenbruche dadurch entstehen, dass man ihn bei seinen einzelnen Gliedern abbricht, werden seine aufeinanderfolgenden (der erste, zweite, dritte u. s. w.) Näherungsbrüche genannt.

2. Nehmen wir $\frac{a}{a_1}$ als gegeben an, so ist damit die Scala der Zahlen $p_0, p_1, p_2, \cdots$ ebenfalls bestimmt. Vermittelst dieser Scala wollen wir nun neben den Gleichungen (1′) resp. (1″) folgendes neue, nach demselben Gesetze gebildete System von Gleichungen einführen:

$$\text{(X)} \qquad \begin{cases} x & = p_0x_1 & + x_2 \\ x_1 & = p_1x_2 & + x_3 \\ x_2 & = p_2x_3 & + x_4 \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ x_{k-1} & = p_{k-1}x_k & + x_{k+1}. \end{cases}$$

Die Anzahl k dieser Gleichungen darf im Falle eines irrationalen Verhältnisses $\frac{a}{a_1}$ beliebig gross angenommen werden, kann dagegen im Falle eines rationalen Verhältnisses nicht grösser sein als die Anzahl der in der Scala vorhandenen

Zahlen p. Wir können nun entweder für x, x_1 beliebige Werthe wählen, und dann werden die nachfolgenden Grössen x_2, x_3, $\cdots$ x_{k+1} durch die Gleichungen (X) mitbestimmt sein; oder aber wir können auch x_k, x_{k+1} beliebig wählen, und dann werden alle vorhergehenden Grössen x, x_1, x_2, $\cdots$ x_{k-1} durch die Gleichungen (X) mitbestimmt sein. Um z. B. x durch x_k, x_{k+1} auszudrücken, hat man nur nöthig, in die erste der Gleichungen (X) den Werth für x_1 einzusetzen, wodurch

$$x = (p_0 p_1 + 1)x_2 + p_0 x_3$$

hervorgeht, darauf in diese Gleichung für x_2 seinen Werth zu setzen, was

$$x = ((p_0 p_1 + 1)p_2 + p_0) \cdot x_3 + (p_0 p_1 + 1) \cdot x_4$$

ergiebt u. s. f., bis alle Zwischengrössen bis x_{k-1} einschliesslich fortgeschafft sind. Da bei diesen aufeinanderfolgenden Substitutionen nirgends andere Rechnungen auszuführen sind als Additionen und Multiplikationen mit den positiven ganzen Zahlen p_0, p_1, p_2, $\cdots$, so müssen in der auf solche Weise entstehenden Gleichung

$$x = c_k x_k + d_k x_{k+1} \tag{5}$$

die Coefficienten c_k, d_k nothwendig positive ganze Zahlen sein; und Gleiches gilt von den Coefficienten c_k', d_k' in der Gleichung

$$x_1 = c_k' x_k + d_k' x_{k+1}, \tag{5}$$

welche auf demselben Wege erhalten wird, wenn man von der zweiten Formel des Systemes (X) ausgeht. Hierbei ist zwar der Natur der Sache nach $k \gtrless 2$ vorausgesetzt, jedoch kann in den Formeln (5) auch $k = 1$ angenommen werden, wenn man dann nur den Coefficienten die Werthe

$$c_1 = p_0, \quad d_1 = 1, \quad c_1' = 1, \quad d_1' = 0 \tag{6}$$

beigelegt denkt.

Den Formeln (5) analog bestehen nun auch die folgenden beiden, vorausgesetzt, dass $k > 1$ ist:

$$\begin{cases} x = c_{k-1} x_{k-1} + d_{k-1} x_k \\ x_1 = c_{k-1}' x_{k-1} + d_{k-1}' x_k . \end{cases} \tag{7}$$

Aber, indem man in den Gleichungen (5) für x_{k+1} seinen, aus der letzten der Gleichungen (X) folgenden Werth einsetzt, findet man andererseits die Formeln:

$$x = d_k x_{k-1} + (c_k - p_{k-1} d_k) x_k$$
$$x_1 = d_k' x_{k-1} + (c_k' - p_{k-1} d_k') x_k,$$

welche mit den vorhergehenden übereinstimmend sein müssen und daher zu den Beziehungen

$$d_k = c_{k-1}, \quad c_k = p_{k-1} d_k + d_{k-1},$$
$$d_k' = c_{k-1}', \quad c_k' = p_{k-1} d_k' + d_{k-1}'$$

hinführen. Hierin ist, der Herleitung gemäss, $k > 1$ vorauszusetzen; wird aber sogar $k > 2$ angenommen, so gestattet die Verbindung der vorstehenden Gleichungen die folgenden abzuleiten:

(8) $\quad c_k = p_{k-1} c_{k-1} + c_{k-2}, \quad c_k' = p_{k-1} c_{k-1}' + c_{k-2}',$

welche zur allmählichen Bildung der Coefficienten c_k, c_k' aus je zwei vorhergehenden dienen. Nun findet man aber aus dem Systeme (X) ohne Mühe, dass $c_2 = p_1 p_0 + 1$, $c_2' = p_1$ ist. Giebt man daher den Zeichen c_0, c_0' die Werthe

(9) $\qquad c_0 = 1, \quad c_0' = 0,$

so leuchtet ein, dass das Bildungsgesetz für die Grössen c_k, c_k', welches die Formeln (8) aussprechen, auch noch für den Index $k = 2$ bestehen bleibt.

Für die Unbestimmten x_k, x_{k+1} wollen wir nun die Werthe 1, 0 resp. wählen; dann werden offenbar nach den Gleichungen (X) x_{k-1}, x_{k-2}, $\cdots$ x_2, x_1, x positive ganze Zahlen werden und eine zunehmende Reihe bilden, woraus von selbst folgt, dass p_0, p_1, p_2, $\cdots$ die grössten Ganzen, x_2, x_3, $\cdots$ die Reste sein werden, welche bei der Division von x durch x_1, von x_1 durch x_2 u. s. f. sich finden, und da unter den letztern der Rest $x_k = 1$ auftritt, müssen die der gemachten Annahme entsprechenden Werthe von x, x_1 relative Primzahlen, d. i. Zahlen ohne gemeinsamen Theiler sein. Diese Werthe sind aber nach den Gleichungen (5) $x = c_k$, $x_1 = c_k'$ resp., daher wir schliessen:

Die Zahlen c_k, c_k' sind relative Primzahlen und

$$\frac{c_k}{c_k'} = (p_0; p_1, p_2, \cdots p_{k-1}),$$

d. h. c_k und c_k' sind Zähler und Nenner des k^{ten} Näherungsbruches für den $\frac{a}{a_1}$ darstellenden Kettenbruch, wenn dieser Näherungsbruch auf seinen einfachsten Ausdruck als Quotient zweier Zahlen ohne gemeinsamen Theiler gebracht gedacht wird. Die Gleichungen (8) enthalten somit das Bildungsgesetz für die Zähler und Nenner der aufeinanderfolgenden Näherungsbrüche und lassen sich in Worten ausdrücken wie folgt:

Denkt man sich die Näherungsbrüche auf ihre einfachsten Ausdrücke gebracht, so erhält man den Zähler des k^{ten} Näherungsbruches, wenn man den $(k-1)^{\text{ten}}$ Theilnenner mit dem Zähler des vorhergehenden Näherungsbruches multiplicirt und dazu den Zähler des zweitvorhergehenden Näherungsbruches addirt. Den Nenner findet man nach demselben Gesetze aus den Nennern der beiden voraufgehenden Näherungsbrüche.

Unter diese Regel lässt sich auch der zweite Näherungsbruch schon begreifen, wenn, dem Obigen zufolge, ein fictiver Näherungsbruch der 0^{ten} Ordnung, $\frac{c_0}{c_0'} = \frac{1}{0}$, hinzugedacht wird, dem natürlich kein Werth, sondern nur eine rein schematische Bedeutung zukommt.

3. Bis hierher haben wir die Gleichungen (X) durchweg benutzt, um x und x_1 durch die beiden letzten Unbestimmten x_k, x_{k+1} auszudrücken. Es ist aber schon bemerkt worden, dass auch das Umgekehrte möglich ist. Schafft man zunächst x_k aus der vorletzten Gleichung durch Einsetzen seines Werthes fort, so kommt

$$x_{k+1} = -p_{k-1}x_{k-2} + (p_{k-1}p_{k-2} + 1)x_{k-1}.$$

Wird nun für x_{k-1} sein Werth gesetzt, so findet sich

$$x_{k+1} = (p_{k-2}p_{k-1}+1)\cdot x_{k-3} - (p_{k-3}(p_{k-2}p_{k-1}+1) + p_{k-1})\cdot x_{k-2}$$

u. s. w. Schliesslich ergiebt sich eine Formel

$$x_{k+1} = m_{k+1}\cdot x + m_{k+1}'\cdot x_1, \tag{10}$$

in welcher die Coefficienten m_{k+1}, m_{k+1}' positive oder negative ganze Zahlen sein müssen, weil bei jenen aufeinander-

folgenden Substitutionen niemals Divisionen auszuführen sind; und auf demselben Wege findet sich

$$x_k = m_k \cdot x + m_k' \cdot x_1 . \tag{10}$$

Nun hat man aber umgekehrt nach (7):

$$x = c_k \cdot x_k + c_{k-1} \cdot x_{k+1}$$
$$x_1 = c_k' \cdot x_k + c_{k-1}' \cdot x_{k+1},$$

zwei Gleichungen, aus deren Auflösung sich

$$x_k = \frac{c_{k-1}' \cdot x - c_{k-1} \cdot x_1}{c_k c_{k-1}' - c_k' c_{k-1}}$$
$$x_{k+1} = \frac{-c_k' \cdot x + c_k \cdot x_1}{c_k c_{k-1}' - c_k' c_{k-1}}$$

ergiebt. Die Vergleichung der letzten Gleichungen, welche dasselbe sein müssen wie die Gleichungen (10), mit diesen letztgenannten, beweist, da m_{k+1}, m_{k+1}' ganze Zahlen waren, dass c_k, c_k' theilbar sind durch $c_k c_{k-1}' - c_k' c_{k-1}$; sie sind aber relative Primzahlen, also muss

$$c_k c_{k-1}' - c_k' c_{k-1} = \pm 1$$

sein. Um über das Vorzeichen zu entscheiden, ersetzen wir c_k und c_k' durch ihre Werthe (8), wodurch die Recursionsformel

$$c_k c_{k-1}' - c_k' c_{k-1} = -(c_{k-1} c_{k-2}' - c_{k-1}' c_{k-2})$$

gewonnen wird. Wenn darin k in $k-1$, $k-2$, $\cdots$ verwandelt wird, in welcher Richtung man soweit fortgehen kann, als die Gleichungen (8) und (10), auf welche wir uns gestützt haben, Geltung behalten, d. h. bis $k = 2$, so entsteht eine Reihe von $k-1$ Gleichungen, deren Multiplikation

$$c_k c_{k-1}' - c_k' c_{k-1} = (-1)^{k-1} \cdot (c_1 c_0' - c_0 c_1')$$

oder einfacher

$$c_k c_{k-1}' - c_k' c_{k-1} = (-1)^k \tag{11}$$

ergiebt.

Aus dieser wichtigen Gleichung findet man ferner durch Division mit $c_{k-1}' \cdot c_k'$

$$\frac{c_k}{c_k'} - \frac{c_{k-1}}{c_{k-1}'} = \frac{(-1)^k}{c_{k-1}' \cdot c_k'}, \tag{12}$$

d. h. den Satz: Der Unterschied zwischen zwei aufeinanderfolgenden Näherungsbrüchen ist ein Bruch, dessen Zähler der positiven oder negativen Einheit gleich, dessen Nenner das Produkt aus den Nennern beider Näherungsbrüche ist. Auch schliesst man aus der Formel (12), dass dieser Unterschied mit wachsendem Index k fort und fort abnimmt, wenn man bedenkt, dass die Zähler und Nenner der Näherungsbrüche ihrem Bildungsgesetze gemäss mit dem Index k zugleich wachsen.

Die soeben abgeleiteten Ergebnisse lassen den Grund für die Wahl der Benennung „Näherungsbrüche" erkennen. Verbinden wir nämlich die Gleichungen

$$x = c_k x_k + c_{k-1} x_{k+1}, \qquad x_1 = c_k' x_k + c_{k-1}' x_{k+1}$$

mit den andern:

$$a = c_k a_k + c_{k-1} a_{k+1}, \qquad a_1 = c_k' a_k + c_{k-1}' a_{k+1},$$

welche auf die analoge Weise aus den Gleichungen (1) gewonnen werden, so finden wir mit Hilfe der Gleichung (11)

$$(13) \qquad a x_1 - a_1 x = (-1)^k \cdot (a_k x_{k+1} - a_{k+1} x_k),$$

eine Beziehung, von welcher man verschiedenen Gebrauch machen kann. Gegenwärtig wollen wir darin $x_k = 1$, $x_{k+1} = 0$ wählen. Dieser Wahl der letzten beiden Unbestimmten entsprechen aber die Werthe $x = c_k$, $x_1 = c_k'$, und folglich liefert so die vorstehende Gleichung die folgende:

$$a c_k' - a_1 c_k = (-1)^{k-1} \cdot a_{k+1}$$

oder auch diese:

$$(14) \qquad \frac{a}{a_1} - \frac{c_k}{c_k'} = \frac{(-1)^{k-1} \cdot a_{k+1}}{a_1 c_k'}.$$

Nun nehmen aber die Grössen $a, a_1, a_2, \cdots$ fort und fort ab, während die Zahlen c_k', wie zuvor bemerkt, mit wachsendem Index gleichfalls wachsen. Daher ergiebt sich der Satz:

Die aufeinanderfolgenden Näherungsbrüche nähern sich dem Werthe des Kettenbruches mehr und mehr, während dieser Werth stets *zwischen* zwei aufeinanderfolgenden Näherungsbrüchen enthalten bleibt. Diejenigen nämlich, deren Index eine gerade Zahl ist, sind

stets grösser, die andern mit ungeradem Index stets kleiner als der Werth des ganzen Kettenbruchs.

Auch lässt sich das Gesetz der Annäherung aus der Formel (14) sogleich entnehmen. Da nämlich alle in dem Ausdrucke $a_1 = c_k' a_k + c_{k-1}' a_{k+1}$ vorkommenden Zeichen positive Werthe bedeuten, und $a_{k+1} < a_k$ ist, so besteht offenbar die Ungleichheit $a_1 > c_k' a_k > c_k' a_{k+1}$ oder $\frac{a_{k+1}}{a_1} < \frac{1}{c_k'}$. Hiernach liefert die Gleichung (14) das Ergebniss: dass der Unterschied zwischen dem Kettenbruche und seinem k^{ten} Näherungsbruche kleiner ist als $\frac{1}{c_k'^2}$; ein Satz, der auch aus dem Umstande geschlossen werden kann, dass der Werth des Kettenbruches immer zwischen zwei aufeinanderfolgenden Näherungsbrüchen enthalten ist. Denn, da er demnach auch zwischen dem k^{ten} und $(k+1)^{\text{ten}}$ enthalten ist, deren Unterschied numerisch gleich $\frac{1}{c_k' c_{k+1}'}$, also kleiner als $\frac{1}{c_k'^2}$ ist, kann er sich von jeder der beiden Grenzen auch nur um eine Grösse $< \frac{1}{c_k'^2}$ unterscheiden.

Man kann übrigens dies Ergebniss auch in der folgenden Form aussprechen: Der Unterschied $c_k - \frac{a}{a_1} \cdot c_k'$ ist numerisch kleiner als $\frac{1}{c_k'}$, und unter dieser Form kann es zu einer sehr wichtigen Anwendung benutzt werden, welche wir hier kurz erwähnen wollen. In der Zahlentheorie spielt die sogenannte Pell'sche Gleichung

$$x^2 - Dy^2 = 1$$

eine grosse Rolle. Es wird daselbst gezeigt, dass, wenn D eine positive, von einem Quadrate verschiedene ganze Zahl ist, die Pell'sche Gleichung unendlich viele ganzzahlige Lösungen $x = t$, $y = u$ hat, welche sämmtlich aus einer Fundamentalauflösung, derjenigen Auflösung nämlich, für welche x, y die kleinsten positiven Werthe T, U besitzen, vermittelst der Formel

$$t + u\sqrt{D} = \pm (T + U\sqrt{D})^n$$

gefunden werden, wenn man dem n allmählich alle ganzzahligen Werthe beilegt, der Reihe nach sowohl das obere als das untere Vorzeichen nimmt und jedesmal die rationalen Theile sowie die irrationalen Theile rechts und links gleichsetzt. Die Grundlage dieses Nachweises ist aber die Thatsache, dass es unendlich viele ganze Zahlen x, y giebt, für welche

$$x - y\sqrt{D} \text{ numerisch } < \frac{1}{y}$$

ist. Und diese Thatsache wird durch den obigen Satz sogleich als richtig erkannt, wenn man $a = \sqrt{D}$, $a_1 = 1$ wählt. Denn die Zähler und Nenner der Näherungsbrüche des Kettenbruches für $\sqrt{D}$ bilden dann unendlich viel Systeme $x = c_k$, $y = c_k'$ von der angegebenen Beschaffenheit.

4. Im vorigen haben wir immer nur endliche Kettenbrüche betrachtet; denn auch in dem Falle eines irrationalen Verhältnisses $\frac{a}{a_1}$ dachten wir uns doch den Algorithmus (1″) stets nur bis zu einer zwar beliebigen aber bestimmten Stelle hin fortgesetzt. Nun werde jedoch eine ganz beliebige unendlich fortlaufende Reihe positiver ganzer Zahlen $p_0, p_1, p_2, \cdots$, deren erste auch Null sein kann, als gegeben angesehen und der unendliche Kettenbruch

$$(K) \qquad (p_0;\ p_1,\ p_2,\ p_3,\ \cdots)$$

betrachtet. Es fragt sich vor allem, stellt ein solcher einen bestimmten Werth vor oder nicht? Bricht man ihn an einer bestimmten Stelle p_n ab, so erhält man den endlichen Werth $\frac{c_n}{c_n'}$; die Frage ist demnach, ob $\frac{c_n}{c_n'}$ mit unendlich wachsendem Index n gegen einen Grenzwerth convergirt. Betrachten wir hierzu die beiden unbegrenzten Zahlenreihen

$$\frac{c_1}{c_1'},\ \frac{c_3}{c_3'},\ \cdots\ \frac{c_{2n+1}}{c_{2n+1}'},\ \cdots$$

$$\frac{c_2}{c_2'},\ \frac{c_4}{c_4'},\ \cdots\ \frac{c_{2n+2}}{c_{2n+2}'},\ \cdots$$

Nach Gleichung (12) findet sich

$$\frac{c_{2n}}{c'_{2n}} - \frac{c_{2n-1}}{c'_{2n-1}} = \frac{1}{c'_{2n}c'_{2n-1}}$$

$$\frac{c_{2n+1}}{c'_{2n+1}} - \frac{c_{2n}}{c'_{2n}} = \frac{-1}{c'_{2n+1}c'_{2n}}$$

$$\frac{c_{2n+2}}{c'_{2n+2}} - \frac{c_{2n+1}}{c'_{2n+1}} = \frac{1}{c'_{2n+2}c'_{2n+1}}$$

und hieraus weiter

$$\frac{c_{2n+1}}{c'_{2n+1}} - \frac{c_{2n-1}}{c'_{2n-1}} = \frac{1}{c'_{2n}} \cdot \left(\frac{1}{c'_{2n-1}} - \frac{1}{c'_{2n+1}}\right) > 0$$

$$\frac{c_{2n+2}}{c'_{2n+2}} - \frac{c_{2n}}{c'_{2n}} = \frac{1}{c'_{2n+1}} \left(\frac{1}{c'_{2n+2}} - \frac{1}{c'_{2n}}\right) < 0.$$

Diese Beziehungen kennzeichnen aber die beiden Zahlenreihen als zwei positive gegen einander convergirende Zahlenreihen, die erste als wachsende, die zweite als abnehmende, und demnach bestimmen sie eine gewisse endliche positive Zahl ω als ihren gemeinsamen Grenzwerth. Hieraus schliessen wir, dass der unendliche Kettenbruch (K) einen endlichen bestimmten Werth ω hat, und er ist offenbar grösser als 1, sobald das Anfangsglied p_0 von Null verschieden ist. Dasselbe wird aber in gleicher Weise gelten auch von den aus (K) dadurch entstehenden Kettenbrüchen, dass man ein oder mehrere aufeinanderfolgende Glieder am Anfange unterdrückt.

Aus der Gleichung

$$\omega = p_0 + \frac{1}{(p_1; p_2, p_3, \cdots)}$$

folgt sodann p_0 als das grösste in $\frac{\omega}{1}$ enthaltene Ganze. Setzt man demnach

$$\omega = 1 \cdot p_0 + a_2,$$

so ist

$$\frac{1}{a_2} = p_1 + \frac{1}{(p_2; p_3, p_4, \cdots)}$$

und folglich p_1 das grösste in $\frac{1}{a_2}$ enthaltene Ganze; also, wenn

$$1 = p_1 a_2 + a_3$$

gesetzt wird, so findet sich

$$\frac{a_2}{a_3} = p_2 + \frac{1}{(p_3;\ p_4,\ p_5,\ \cdots)}$$

und demnach p_2 als das grösste in $\frac{a_2}{a_3}$ enthaltene Ganze u. s. w. Es ergiebt sich mit anderen Worten als der dem Verhältnisse $\frac{\omega}{1}$ entsprechende Algorithmus (1) die unendliche Reihe von Gleichungen:

$$(\Omega) \qquad \begin{aligned} \omega &= 1 \cdot p_0 + a_2 \\ 1 &= a_2 p_1 + a_3 \\ a_2 &= a_3 p_2 + a_4 \\ &\cdots\cdots \end{aligned}$$

5. Nach dieser allgemeinen Erörterung wollen wir nun eine Gattung unendlicher Kettenbrüche genauer betrachten, welche in arithmetischer Beziehung von besonderem Interesse sind, die periodischen Kettenbrüche. Nehmen wir an, in der unendlichen Reihe von Gleichungen (Ω) kehre von einem bestimmten Theilnenner p_n an stets dieselbe Reihe von Theilnennern $p_n,\ p_{n+1},\ p_{n+2},\ \cdots\ p_{n+m-1}$ wieder, so wird der Kettenbruch ein periodischer:

$$(p_0;\ p_1,\ \cdots\ p_{n-1},\ p_n,\ p_{n+1},\ \cdots\ p_{n+m-1},\ p_n,\ p_{n+1},\ \cdots\ p_{n+m-1},\ \cdots),$$

und jene Reihe von Theilnennern seine Periode genannt. Rein periodisch heisst der Kettenbruch, wenn die Periodicität sogleich mit dem Anfangsgliede p_0 beginnt. Nun findet man aus den n ersten Gleichungen (Ω)

$$(15) \qquad \begin{cases} \omega = c_n a_n + c_{n-1} a_{n+1} \\ 1 = c'_n a_n + c'_{n-1} a_{n+1}, \end{cases}$$

und aus den folgenden m Gleichungen, nämlich

$$\begin{aligned} a_n &= p_n a_{n+1} + a_{n+2} \\ a_{n+1} &= p_{n+1} a_{n+2} + a_{n+3} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n+m-1} &= p_{n+m-1} a_{n+m} + a_{n+m+1}, \end{aligned}$$

nach demselben Raisonnement die Formeln

$$\begin{aligned} a_n &= C_m a_{n+m} + C_{m-1} a_{n+m+1} \\ a_{n+1} &= C'_m a_{n+m} + C'_{m-1} a_{n+m+1}, \end{aligned}$$

in welchen C_m, C'_m, $\cdots$ ebenso aus p_n, p_{n+1}, $\cdots$ p_{n+m-1}, wie c_m, c'_m, $\cdots$ aus p_0, p_1, $\cdots$ p_{m-1} zu bilden und folglich positive ganze Zahlen sind. Bemerkt man ferner, dass $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ und $\frac{a_{n+m}}{a_{n+m+1}}$ beide in denselben rein periodischen Kettenbruch

$$(p_n;\ p_{n+1},\ \cdots\ p_{n+m-1},\ p_n,\ p_{n+1},\ \cdots\ p_{n+m-1},\ p_n,\ \cdots)$$

sich entwickeln lassen, also gleichen Werth haben, so leitet man durch Division der letzten beiden Gleichungen durch einander die folgende her:

$$C'_m \cdot A^2 + (C'_{m-1} - C_m) \cdot A - C_{m-1} = 0,$$

in welcher A für $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ gesetzt worden ist. Diese lehrt aber den wichtigen Satz: Jeder rein periodische Kettenbruch ist die positive Wurzel einer Gleichung zweiten Grades mit ganzzahligen Coefficienten, deren zweite Wurzel negativ ist. Dieser Zusatz folgt nämlich aus dem Umstande, dass der erste und letzte Coefficient, C'_m, $-C_{m-1}$, entgegengesetzte Vorzeichen haben, das Produkt beider Wurzeln aber bekanntlich gleich $\frac{-C_{m-1}}{C'_m}$, also negativ ist.

Aus den Gleichungen (15) folgt

$$\omega = \frac{c_n A + c_{n-1}}{c'_n A + c'_{n-1}},$$

also

$$A = \frac{c_{n-1} - c'_{n-1}\omega}{c'_n \omega - c_n}.$$

Setzt man diesen Werth für A in die vorige Gleichung ein, so ergiebt sich für ω eine ähnliche quadratische Gleichung, und folglich der allgemeinere Satz: Jeder periodische Kettenbruch ist Wurzel einer quadratischen Gleichung mit ganzzahligen Coefficienten, oder, wie es früher ausgedrückt worden ist, eine quadratische Irrationelle, eine algebraische Zahl zweiten Grades.

Vierte Vorlesung.

Die quadratischen Irrationellen.

1. Der in der vorigen Vorlesung hergeleitete Satz erweckt die Frage, ob er auch umgekehrt werden darf, ob nämlich der Kettenbruch, in welchen eine (positive) Wurzel einer quadratischen Gleichung mit ganzzahligen Coefficienten entwickelt werden kann, periodisch ist oder nicht. Die Beantwortung dieser Frage steht in engster Beziehung zu der Theorie der sogenannten quadratischen Formen, insbesondere zu dem Probleme, die unbestimmte Gleichung

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = m, \tag{1}$$

in welcher a, b, c, m gegebene ganze Zahlen sind, in ganzen Zahlen x, y aufzulösen. Wir wollen daher zunächst hier ein paar der einfachsten Eigenschaften der quadratischen Formen, deren wir bedürfen werden, voraufschicken.

Ebenso, wie bei der Gleichung

$$a + 2bz + cz^2 = 0$$

die Zahl $D = b^2 - ac$ von Bedeutung ist, insofern ihr Vorzeichen über die Natur der Wurzeln, ob sie reell sind oder nicht, entscheidet, spielt dieselbe Zahl auch in der Theorie der quadratischen Formen eine grosse Rolle und wird deshalb die Determinante der Form genannt. Wir dürfen uns für unsern Zweck auf die Annahme beschränken, dass sie positiv und keine Quadratzahl ist.

1) Wenn man in der Form statt der Zahlen x, y zwei andere x', y' mittels der Substitution

$$x = \alpha x' + \beta y' \qquad y = \gamma x' + \delta y' \tag{2}$$

einführt, in welcher α, β, γ, δ ganze Zahlen bedeuten sollen, so geht sie in eine andere quadratische Form

$$a'x'^2 + 2b'x'y' + c'y'^2$$

mit ganzzahligen Coefficienten über, welche mit den ursprünglichen a, b, c durch nachstehende Gleichungen verbunden sind:

$$(3)\quad \begin{cases} a' = a\alpha^2 + 2b\alpha\gamma + c\gamma^2 & = (a\alpha + b\gamma)\alpha + (b\alpha + c\gamma)\gamma \\ b' = (a\alpha + b\gamma)\beta + (b\alpha + c\gamma)\delta & = (a\beta + b\delta)\alpha + (b\beta + c\delta)\gamma \\ c' = a\beta^2 + 2b\beta\delta + c\delta^2 & = (a\beta + b\delta)\beta + (b\beta + c\delta)\delta. \end{cases}$$

Multiplicirt man nun die beiden Ausdrücke für b' in einander und subtrahirt davon das Produkt $a'c'$, so findet man die Beziehung

$$(4)\qquad D' = D \cdot (\alpha\delta - \beta\gamma)^2$$

zwischen den Determinanten der transformirten und der ursprünglichen Form. Hiernach werden beide Determinanten einander gleich sein, wenn der Modulus $\alpha\delta - \beta\gamma$ der Substitution (2) gleich ± 1 ist. In demselben Falle ergiebt aber die Auflösung der Gleichungen (2) die folgenden:

$$(5)\qquad \pm x' = \delta x - \beta y, \quad \pm y' = -\gamma x + \alpha y,$$

durch welche offenbar die transformirte Form rückwärts in die ursprüngliche übergeht; und es werden in diesem Falle nicht nur ganzzahligen Werthen x', y' solche für x, y entsprechen, sondern auch umgekehrt. Man nennt alsdann die beiden Formen einander äquivalent, und zwar eigentlich oder uneigentlich, je nachdem in der Gleichung

$$(6)\qquad \alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1$$

das obere oder untere Vorzeichen zu nehmen ist; und gewinnt mit Rücksicht auf (4) den Satz: Aequivalente Formen haben gleiche Determinante.

2) Geht nun die Form $ax^2 + 2bxy + cy^2$ durch die Substitution (2) in die äquivalente Form $a'x'^2 + 2b'x'y' + c'y'^2$, desgleichen durch die Substitution

$$x = \lambda x'' + \mu y'', \quad y = \nu x'' + \varrho y''$$

in die äquivalente Form $a''x''^2 + 2b''x''y'' + c''y''^2$ über, so wird offenbar die zweite Form in diese letztere verwandelt, wenn man nach der Substitution (5) die soeben bezeichnete anwendet, d. h. durch die einzige Substitution

$$\pm x' = (\delta\lambda - \beta\nu)x'' + (\delta\mu - \beta\varrho)y''$$
$$\pm y' = (-\gamma\lambda + \alpha\nu)x'' + (-\gamma\mu + \alpha\varrho)y'',$$

welche aus ihrer Zusammensetzung hervorgeht. Da für die letztere aber ihr Modulus

$$(\delta\lambda - \beta\nu)(-\gamma\mu + \alpha\varrho) - (\delta\mu - \beta\varrho)(-\gamma\lambda + \alpha\nu)$$
$$= (\alpha\delta - \beta\gamma)\cdot(\lambda\varrho - \mu\nu)$$

also gleich ± 1 gefunden wird, je nachdem die Aequivalenzen beide gleicher oder verschiedener Art sind, so findet sich der Satz: Zwei Formen, welche einer dritten äquivalent sind, sind es auch unter einander, eigentlich oder uneigentlich, je nachdem sie der dritten Form auf gleiche oder auf verschiedene Art äquivalent sind.

3) Die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$a + bz + cz^2 = 0,$$

nämlich

$$z_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{c}, \quad z_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{c},$$

sollen zugleich die Wurzeln der quadratischen Form

$$ax^2 + 2bxy + cy^2$$

heissen, und zwar resp. die erste und zweite Wurzel derselben. Geht nun diese Form durch die Substitution (2) in eine äquivalente Form $a'x'^2 + 2b'x'y' + c'y'^2$ mit den Wurzeln z_1', z_2' über, so bestätigt man mit Rücksicht auf die dann stattfindenden Gleichungen (2), (4), (6) ohne Mühe die Beziehung

$$z = \frac{\gamma + \delta z'}{\alpha + \beta z'}$$

zwischen den gleichnamigen Wurzeln beider Formen, wenn die Aequivalenz eine eigentliche ist.

4) Von den Formen, welche einer gegebenen Form eigentlich äquivalent sind, heben wir für das Folgende nur diejenigen hervor, welche, wenn δ eine positive ganze Zahl bedeutet, durch die Substitution

$$x = y', \quad y = -x' + \delta y' \tag{7}$$

daraus hervorgehen. Man findet für die Coefficienten der transformirten Form alsdann die Werthe

$$a' = c, \quad b' = -b - c\delta, \quad c' = a + 2b\delta + c\delta^2.$$

Die besondere Beziehung beider Formen zu einander besteht hiernach ausser der Aequivalenz und der aus ihr folgenden Gleichheit der Determinanten darin, dass der erste Coefficient der neuen Form gleich dem letzten der ursprünglichen Form,

und die Summe der mittleren Coefficienten durch den gemeinsamen Coefficienten theilbar ist. Zwei äquivalente Formen dieser Art sollen benachbarte Formen heissen, und zwar die neue der ursprünglichen nach rechts, diese der neuen nach links hin benachbart. Umgekehrt sind zwei Formen, deren Determinanten gleich sind und deren Coefficienten die angegebenen Eigenschaften haben, einander eigentlich äquivalent, und die eine geht durch eine Substitution von der Form (7), in welcher δ dem negativ genommenen Quotienten aus der Summe der mittleren und dem gemeinsamen Coefficienten gleich ist, in die andere über.

2. Wir bezeichen nun zur Abkürzung mit

$$(A_0,\ B_0,\ A_1)$$

eine quadratische Form mit den drei ganzzahligen Coefficienten A_0, B_0, A_1 und nehmen an, ihre Determinante $D = B_0^2 - A_0 A_1$ sei positiv und keine Quadratzahl, von ihren Wurzeln

$$\Omega_0 = \frac{-B_0 - \sqrt{D}}{A_1}, \quad \Omega_0' = \frac{-B_0 + \sqrt{D}}{A_1}$$

aber sei die erstere positiv. Wir können dieselbe dann, da sie irrational ist, in einen unendlichen Kettenbruch

$$\Omega_0 = (p_0; p_1, p_2, p_3, \cdots)$$

entwickeln und wollen seine Natur genauer untersuchen. Zu diesem Zwecke denken wir uns seine aufeinanderfolgenden Näherungsbrüche

$$\frac{c_0}{c_0'}, \quad \frac{c_1}{c_1'}, \quad \frac{c_2}{c_2'}, \quad \frac{c_3}{c_3'}, \quad \cdots,$$

wo also $c_0 = 1$, $c_0' = 0$, $c_1 = p_0$, $c_1' = 1$, u. s. w. ist. Transformirt man nun die Form (A_0, B_0, A_1) mittels nachstehender Substitutionen:

$$\begin{pmatrix} c_0', & c_1' \\ c_0, & c_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} c_1', & c_2' \\ c_1, & c_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} c_2', & c_3' \\ c_2, & c_3 \end{pmatrix}, \quad \cdots,$$

so entsteht eine Reihe anderer quadratischer Formen

$$(A_1, B_1, A_2),\ (A_2, B_2, A_3),\ (A_3, B_3, A_4),\ \cdots,$$

welche, wegen der allgemeinen Beziehung

$$c_i' c_{i+1} - c_i c_{i+1}' = (-1)^{i+1},$$

der ursprünglichen Form abwechselnd die erste uneigentlich, die zweite eigentlich, die dritte uneigentlich u. s. f. äquivalent sind. Hieraus folgen für alle Werthe $i = 0, 1, 2, 3, \cdots$ die nachstehenden Beziehungen, welche die Coefficienten der aufeinanderfolgenden Transformirten finden lehren:

$$(8)\qquad \begin{aligned} A_{i+1} &= A_0 c_i'^2 + 2B_0 c_i' c_i + A_1 c_i^2 \\ &= A_1(c_i - c_i' \Omega_0) \cdot (c_i - c_i' \Omega_0') \end{aligned}$$

$$(9)\qquad B_{i+1} = A_0 c_i' c_{i+1}' + B_0(c_i' c_{i+1} + c_i c_{i+1}') + A_1 c_i c_{i+1}$$

$$(10)\qquad B_i^2 - A_i A_{i+1} = D.$$

Nun geht offenbar eine Form $ax^2 + 2bxy + cy^2$ durch die Substitution $x = x'$, $y = -y'$, deren Modulus -1 ist, in $ax'^2 - 2bx'y' + cy'^2$ über, welche also jener Form uneigentlich äquivalent ist. Daher sind die Formen

$$(A_1, -B_1, A_2),\ (A_2, B_2, A_3),\ (A_3, -B_3, A_4),\ \cdots$$

oder allgemein die Form

$$(A_i, \varepsilon^i B_i, A_{i+1}),$$

in welcher ε statt -1 gesetzt ist, der ursprünglich gegebenen Form und folglich auch unter einander sämmtlich eigentlich äquivalent. Ersetzt man aber die Zahlen c_{i+1}, c_{i+1}' in dem obigen Ausdrucke für B_{i+1} durch ihre Werthe, nämlich $p_i c_i + c_{i-1}$, $p_i c_i' + c_{i-1}'$ resp., so findet man mit Rücksicht auf die Gleichungen (8) und (9) für jedes $i > 0$ die folgende:

$$B_{i+1} = p_i \cdot A_{i+1} + B_i,$$

der man auch die Gestalt

$$(11)\qquad \varepsilon^i \cdot B_i + \varepsilon^{i+1} \cdot B_{i+1} = \varepsilon^{i+1} p_i \cdot A_{i+1}$$

geben kann, eine Gleichung, aus welcher weiter zu schliessen ist, dass die Formen, deren eigentliche Aequivalenz wir soeben festgestellt haben, eine Reihe nach rechts hin benachbarter Formen bilden. Sie gehen daher allgemein, die i^{te} in die $(i+1)^{te}$ über durch die Substitution $\begin{pmatrix} 0, & 1 \\ -1, & \varepsilon^i p_i \end{pmatrix}$; diese Bemerkung liefert uns aber noch die nachstehende, für jedes $i \gtrless 0$ — denn dieselbe wird nach (8) auch noch für $i = 0$ erfüllt — giltige Gleichung:

$$(12)\qquad A_{i+2} = A_{i+1} \cdot p_i^2 + 2B_i \cdot p_i + A_i.$$

3. Sehen wir jetzt, was aus diesen Beziehungen sich schliessen lässt. Im Ausdrucke (8) für A_{i+1} ist der Faktor $c_i - \Omega_0 c_i'$ nach der Natur der aufeinanderfolgenden Näherungsbrüche abwechselnd positiv und negativ, wenn i alle ganzzahligen Werthe durchläuft. Wenn daher der dritte Faktor $c_i - \Omega_0' c_i'$ von einem bestimmten Werthe des Index i an dauernd dasselbe Vorzeichen beibehält, so wird von dieser Stelle an A_{i+1} bei wachsendem Index abwechselnd das eine und das andere Vorzeichen erhalten. Dies tritt aber in der That ein. Denn, da $\frac{c_i}{c_i'} - \Omega_0$ mit wachsendem Index i gegen Null convergirt, wird es von einem hinreichend grossen Index $i = k$ an stets numerisch kleiner bleiben als $\Omega_0 - \Omega_0'$, und folglich wird dann

$$c_i - c_i' \Omega_0 + (\Omega_0 - \Omega_0') c_i' = c_i - c_i' \Omega_0'$$

dasselbe Vorzeichen haben und für jeden grösseren Werth von i behalten, wie $\Omega_0 - \Omega_0'$.

Hiernach werden

$$A_{k+1}, \quad A_{k+2}, \quad A_{k+3}, \quad \cdots$$

abwechselndes Vorzeichen haben, und es ist leicht zu sehen, dass allgemein $\varepsilon^{k+h} \cdot A_{k+h}$ positiv ist. Denn in der Formel

$$A_{k+h} = A_1 (c_{k+h-1} - c_{k+h-1}' \Omega_0) (c_{k+h-1} - c_{k+h-1}' \Omega_0')$$

hat nach der Annahme der letzte Faktor dasselbe Vorzeichen wie $\Omega_0 - \Omega_0'$, d. h. aber, da

$$\Omega_0 - \Omega_0' = \frac{2\sqrt{D}}{-A_1}$$

ist, das entgegengesetzte Vorzeichen wie A_1, und folglich muss A_{k+h} das entgegengesetzte Vorzeichen haben, wie der Ausdruck $c_{k+h-1} - c_{k+h-1}' \Omega_0$, d. h. positiv oder negativ sein, jenachdem $k + h$ gerade oder ungerade ist.

Bezeichnen hiernach Ω_{k+h}, Ω_{k+h}' die erste und zweite Wurzel der quadratischen Form

$$(A_{k+h}, \quad \varepsilon^{k+h} B_{k+h}, \quad A_{k+h+1}),$$

so sind für jedes positive h diese beiden Wurzeln nothwendig

von entgegengesetztem Vorzeichen, da A_{k+h}, A_{k+h+1} es sind. Man findet aber

$$\varepsilon^{k+h}\Omega_{k+h} = \frac{-B_{k+h} - \varepsilon^{k+h}\sqrt{D}}{A_{k+h+1}}$$

$$\varepsilon^{k+h+1}\cdot\Omega'_{k+h} = \frac{B_{k+h} - \varepsilon^{k+h}\sqrt{D}}{A_{k+h+1}};$$

das übereinstimmende Vorzeichen der Grössen

$$\varepsilon^{k+h}\Omega_{k+h}, \quad \varepsilon^{k+h+1}\Omega'_{k+h}$$

muss nothwendig das ihrer Summe sein und ergiebt sich so als das Vorzeichen von $\frac{-2\varepsilon^{k+h}\sqrt{D}}{A_{k+h+1}}$, d. h. von $\varepsilon^{k+h+1}A_{k+h+1}$, also als das positive.

Nun bestehen aber zwischen den gleichnamigen Wurzeln zweier aufeinanderfolgenden Formen nach No. 1, 3) die beiden Gleichungen

$$(13)\qquad \begin{cases} \Omega_{k+h-1} = \dfrac{-1 - \varepsilon^{k+h}p_{k+h-1}\cdot\Omega_{k+h}}{\Omega_{k+h}} \\ \Omega'_{k+h-1} = \dfrac{-1 - \varepsilon^{k+h}p_{k+h-1}\cdot\Omega'_{k+h}}{\Omega'_{k+h}}. \end{cases}$$

Schreiben wir die erste dieser Gleichungen in der Art:

$$\frac{1}{\varepsilon^{k+h}\Omega_{k+h}} = \varepsilon^{k+h-1}\Omega_{k+h-1} - p_{k+h-1},$$

so lehrt sie, dass $\varepsilon^{k+h-1}\Omega_{k+h-1} > p_{k+h-1}$ sein muss, gleichzeitig aber $< p_{k+h-1} + 1$; denn sonst wäre $\frac{1}{\varepsilon^{k+h}\Omega_{k+h}}$ grösser und folglich $\varepsilon^{k+h}\Omega_{k+h}$ kleiner als Eins, und es ergäbe sich, wenn man um eine Stelle weiter ginge, aus der Formel

$$\frac{1}{\varepsilon^{k+h+1}\Omega_{k+h+1}} = \varepsilon^{k+h}\Omega_{k+h} - p_{k+h},$$

in welcher jedenfalls $k+h>0$, also $p_{k+h} \gtreqless 1$ ist, für $\varepsilon^{k+h+1}\Omega_{k+h+1}$ ein negativer Werth, gegen das zuvor Bewiesene. Hieraus folgt, dass, sobald $h \gtreqless 1$ ist, p_{k+h-1} das grösste in $\varepsilon^{k+h-1}\Omega_{k+h-1}$ enthaltene Ganze ist.

Schreibt man ferner die zweite Gleichung (13) in der folgenden Form:

$$\varepsilon^{k+h}\Omega'_{k+h-1} = \frac{1}{\varepsilon^{k+h+1}\Omega'_{k+h}} - p_{k+h-1},$$

so lehrt sie zunächst für jedes $h > 1$, dass $\frac{1}{\varepsilon^{k+h+1}\Omega'_{k+h}} > p_{k+h-1}$ ist. Wird aber sogar $h > 2$ vorausgesetzt, so kann $\frac{1}{\varepsilon^{k+h+1}\Omega'_{k+h}}$ nicht zugleich auch grösser sein als $p_{k+h-1} + 1$, denn sonst würde $\varepsilon^{k+h}\Omega'_{k+h-1}$ grösser, also $\frac{1}{\varepsilon^{k+h}\Omega'_{k+h-1}}$ kleiner sein als die Einheit, und wenn man um eine Stelle weiter zurückginge, würde aus der analogen Formel

$$\varepsilon^{k+h-1}\Omega'_{k+h-2} = \frac{1}{\varepsilon^{k+h}\Omega'_{k+h-1}} - p_{k+h-2}$$

gegen das zuvor Bewiesene für $\varepsilon^{k+h-1}\Omega'_{k+h-2}$ ein negativer Werth hervorgehen, da solange jedenfalls $k + h - 2 > 0$, also $p_{k+h-2} \gtrless 1$ bleibt. Für $h > 2$ ist demnach p_{k+h-1} die grösste ganze Zahl, welche in $\frac{1}{\varepsilon^{k+h+1}\Omega'_{k+h}}$ enthalten ist.

4. Nach diesen Vorbereitungen kehren wir zur Gleichung (10) zurück. Weil die Zahlen A_{k+h}, A_{k+h+1} entgegengesetzte Vorzeichen haben, sobald $h \gtrless 1$ ist, lehrt jene Gleichung, wenn man $i = k + h$ darin setzt, dass weder die Zahlen A_{k+h} die endliche Grenze D, noch die Zahlen B_{k+h} die endliche Grenze $\sqrt{D}$ überschreiten, dass mithin diesen ganzen Zahlen nur eine endliche Menge verschiedener Werthe zukommen kann. Es wird daher nothwendig geschehen müssen, dass in der fortlaufenden Reihe benachbarter Formen endlich einmal die Coefficienten einer derselben mit den Coefficienten einer früheren übereinstimmen, und zwar wird dies wegen des wechselnden Vorzeichens der äusseren Coefficienten nach einer geraden Anzahl zwischenliegender Formen eintreten müssen. Sei also, indem der Kürze wegen $k + h = n$ gesetzt wird, $A_n = A_{n+2r}$, $B_n = B_{n+2r}$, $A_{n+1} = A_{n+2r+1}$. Dann ist auch $\Omega_n = \Omega_{n+2r}$, und, da p_n, p_{n+2r} die grössten in $\varepsilon^n\Omega_n$, $\varepsilon^{n+2r}\Omega_{n+2r}$ resp. enthaltenen Ganzen sind, auch

$p_n = p_{n+2r}$. Daher folgt nun nach der Gleichung (11) $B_{n+1} = B_{n+2r+1}$, sowie endlich nach der Gleichung (12) auch $A_{n+2} = A_{n+2r+2}$, d. h. die beiden, in der Reihe äquivalenter Formen auf jene beiden bezüglich folgenden Formen sind wieder identisch; und hieraus schliesst man in Fortsetzung derselben Ueberlegungen, dass von der Form $(A_{n+2r}, \varepsilon^{n+2r} B_{n+2r}, A_{n+2r+1})$ ab die sämmtlichen auf $(A_n, \varepsilon^n B_n, A_{n+1})$ folgenden Formen sich wiederholen, dass also mit andern Worten von der Form $(A_n, \varepsilon^n B_n, A_{n+1})$ an die ganze Reihe benachbarter Formen aus einer unendlich oft wiederholten Periode von $2r$ Formen besteht. Da dasselbe alsdann bezüglich der Reihe $p_n, p_{n+1}, p_{n+2}, \cdots$ gelten muss, findet sich auf solche Weise offenbar zunächst der Satz bewiesen: Hat eine quadratische Gleichung mit ganzzahligen Coefficienten und einer Determinante, welche keine quadratische Zahl*) ist, eine positive Wurzel, so ist die Kettenbruchentwicklung dieser Wurzel periodisch — die genaue Umkehrung des am Schlusse der vorigen Vorlesung erhaltenen Ergebnisses; denn es ist von selbst einleuchtend, dass die in diesem Ergebnisse vorkommende quadratische Gleichung zur Determinante keine (positive) Quadratzahl haben kann, weil sonst die Wurzeln der Gleichung rational würden, also nur eine endliche, keine periodische d. h. unendliche Kettenbruchentwicklung zulassen würden.

Es scheint zwar, als sei im Vorigen dieser Satz nur für die erste Wurzel Ω_0 bewiesen. Indessen, wenn Ω_0' gleichfalls positiv ist, kann genau dieselbe Betrachtung auch für diese zweite Wurzel angestellt werden und führt zu demselben Ergebnisse. Die leichten Veränderungen, welche dabei eintreten, sind nur die, dass $\varepsilon^{k+h} A_{k+h}$ negativ, $\varepsilon^{k+h} \Omega'_{k+h}$, $\varepsilon^{k+h+1} \Omega_{k+h}$ positiv werden; es findet sich dagegen, dass alle weiteren Schlüsse ihre Giltigkeit behalten, wenn man durchweg die ersten und zweiten Wurzeln ihre Rolle tauschen lässt.

---

*) Es ist hier nicht nöthig, ausdrücklich diese Zahl als positiv vorauszusetzen, weil diese Voraussetzung schon in derjenigen einer positiven also reellen Wurzel der Gleichung mit einbegriffen ist.

5. Beachtet man weiter, dass auch $\Omega_n' = \Omega_{n+2r}'$ sein wird, so folgt, weil p_{n-1}, p_{n+2r-1} die in den Werthen $\frac{1}{\varepsilon^{n+1}\Omega_n'}$, $\frac{1}{\varepsilon^{n+2r+1}\Omega_{n+2r}'}$ bez. enthaltenen grössten Ganzen sind, auch die Gleichheit dieser beiden Zahlen, hieraus aber mittels der Beziehung (11) die Gleichheit $B_{n-1} = B_{n+2r-1}$, und endlich nach der Gleichung (12) auch $A_{n-1} = A_{n+2r-1}$, d. h. die Periode der benachbarten Formen kann auch weiter nach links hin fortgesetzt werden. Indessen ist dieser Fortsetzung eine gewisse Schranke gesetzt durch den Umstand, dass das bei dieser Überlegung benutzte Endergebniss der No. 4 nur für $h > 2$ gilt. Infolge davon wird also jedenfalls sich erschliessen lassen, dass die Periodicität in der Reihe der quadratischen Formen schon von der Form $(A_{k+2}, \varepsilon^{k+2}B_{k+2}, A_{k+3})$ und entsprechend die des Kettenbruches vom Theilnenner p_{k+2} an stattfindet. Wenn jedoch schon A_k und A_{k+1} entgegengesetztes Vorzeichen hätten, so würde, wenn $k > 0$ ist, die Fortsetzung der Periode noch um ein Glied weiter nach links hin möglich sein, diese selbst also schon mit der Form $(A_{k+1}, \varepsilon^{k+1}B_{k+1}, A_{k+2})$ bez. mit dem Theilnenner p_{k+1} ihren Anfang nehmen. Ist $k = 0$, so ist, um den gleichen Schluss ziehen zu dürfen, die Voraussetzung nothwendig, dass p_0 positiv ist. Denn er beruht wesentlich auf dem Umstande, dass p_{k+h-2} von Null verschieden ist, und dies ist für $k = 0$, $h = 2$ eben nur unter jener Voraussetzung der Fall.

6. Dies vorausgeschickt, wollen wir nun unsere bisherigen Betrachtungen specialisiren, indem wir bezüglich der Form (A_0, B_0, A_1) annehmen, nicht nur, dass die erste Wurzel Ω_0 positiv, sondern auch, dass die zweite Wurzel Ω_0' negativ sei. Diese Annahme erfordert, dass A_0, A_1 entgegengesetzte Vorzeichen haben, nämlich A_0 positiv, A_1 negativ sei, und hat zur Folge, dass in dem Ausdrucke (8) für A_{i+1} der letzte Faktor für jeden Werth des Index i positiv ist, sodass $k = 0$ angenommen werden kann. Nach der zuletzt gemachten Vorbemerkung wird also die Periodicität des Kettenbruchs für Ω_0 sicherlich schon von dem Theilnenner p_1 an stattfinden, wenn p_0 positiv, d. h. $\Omega_0 > 1$ ist. Ist gleichzeitig Ω_0' numerisch kleiner als Eins, so findet man aus der Beziehung

$$\varepsilon \Omega_0' = \frac{1}{\Omega_1'} - p_0,$$

dass $\frac{1}{\Omega_1'} > p_0$, aber auch $< p_0 + 1$ ist; es ergiebt sich also auch noch p_0 als die grösste in $\frac{1}{\varepsilon^2 \Omega_1'}$ enthaltene ganze Zahl, was hinreicht, um die Periodicität wieder noch einen Schritt weiter nach links zu schieben, sodass sie mit dem Anfangsgliede p_0 beginnt. So findet sich demnach der Satz: Hat eine quadratische Gleichung mit ganzzahligen Coefficienten irrationale Wurzeln, eine positive, welche grösser als Eins, eine negative, welche kleiner als Eins ist, so ist die Kettenbruchentwicklung für die erstere rein periodisch.

Betrachten wir insbesondere den Fall, in welchem $A_0 = 1$, $B_0 = 0$, $A_1 = -D$ ist, während wieder D positiv und von einer Quadratzahl verschieden vorausgesetzt wird, so ist $\Omega_0 = \frac{1}{\sqrt{D}}$, $\Omega_0' = \frac{-1}{\sqrt{D}}$; die besonderen Voraussetzungen, welche soeben gemacht worden sind, finden sich also erfüllt bis auf den hier verschwindenden Werth von p_0. Infolge davon wird die Kettenbruchentwicklung für Ω_0 nur von dem Theilnenner p_2 an periodisch sein; man kann aber das Ergebniss offenbar in der folgenden Weise aussprechen: Die Quadratwurzel aus einer positiven, nicht quadratischen Zahl D kann in einen Kettenbruch

$$(p_1; p_2, p_3, p_4, \cdots)$$

entwickelt werden, welcher von dem ersten Theilnenner an periodisch ist.

Abgesehen von den besonderen Sätzen, welche wir zuletzt ausgesprochen haben, ist das Hauptergebniss unserer Untersuchung über periodische Kettenbrüche in dem Umstande zu erblicken, dass die Eigenschaft, in einen solchen Kettenbruch entwickelt werden zu können, den durch quadratische Gleichungen bestimmten algebraischen Irrationellen charakteristisch ist, insofern diese Irrationellen solche Entwicklung zulassen, aber auch nur sie allein. Wir

haben demnach in der genannten Eigenschaft ein wichtiges *arithmetisches Kennzeichen* der quadratischen Irrationellen gefunden.

Fünfte Vorlesung.

Vorhandensein transcendenter Zahlen. — Geschichtliches über die Zahlen e und π.

1. Die Frage, ob auch für die Wurzeln von Gleichungen mit ganzzahligen Coefficienten, deren Grad höher ist als der zweite, ein ähnliches arithmetisches Kennzeichen vorhanden ist, als wir zuletzt für die quadratischen Irrationellen gefunden haben, ist, wie schon bemerkt, noch eine offene und wir lassen ihre nähere Besprechung bis auf eine spätere Stelle. Hier treten wir dagegen nun der Frage näher, ob es auch ausser den algebraischen Zahlen noch andere, ob es auch transcendente Zahlen giebt. Durch eine sehr schöne und einfache Untersuchung*), welche allein die Betrachtung der oben untersuchten Kettenbrüche erfordert, hat Liouville den strengen Nachweis geliefert, dass in der That transcendente Zahlen vorhanden sind. Das Wesentliche seiner Betrachtung ist Folgendes:

Man nennt eine Gleichung

(1) $x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \cdots + A_{n-1} x + A_n = 0$

mit rationalen Coefficienten irreduktibel, wenn der Ausdruck n^{ten} Grades zur Linken nicht in Faktoren geringeren Grades mit gleichfalls rationalen Coefficienten zerlegbar ist. Eine solche Gleichung kann keine rationale Wurzel $\frac{p}{q}$ haben, weil sonst jener Ausdruck den rationalen Faktor $x - \frac{p}{q}$ besässe. Auch müssen alle ihre Wurzeln ungleich sein, denn andern-

*) Journal v. Liouville, Bd. 16: sur des classes très étendues de quantités dont la valeur n'est ni algébrique ni même réductible à des irrationelles algébriques.

falls würde bekanntlich jener Ausdruck mit dem abgeleiteten Ausdrucke

$$nx^{n-1} + (n-1)A_1x^{n-2} + \cdots + A_{n-1} = 0$$

einen gemeinsamen, also einen rationalen Faktor haben, gegen die Voraussetzung. Durch Fortschaffen der etwa in den Coefficienten auftretenden Nenner lässt sich der Gleichung (1) diese Form geben:

$$(2) \quad ax^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0,$$

in welcher sämmtliche Coefficienten ganze Zahlen bedeuten. Wir bezeichnen ihre Wurzeln mit $x_0, x_1, x_2, \cdots x_{n-1}$, die nach dem soeben Bemerkten ungleich sind, und nehmen an, dass x_0 reell und positiv sei. Diese Zahl x_0 entwickeln wir in einen unendlichen Kettenbruch

$$x_0 = (p_0; p_1, p_2, p_3 \cdots),$$

dessen aufeinanderfolgende Näherungsbrüche

$$\frac{c_0}{c_0'}, \frac{c_1}{c_1'}, \frac{c_2}{c_2'}, \frac{c_3}{c_3'}, \cdots$$

sein mögen; diese bilden also eine rationale Zahlenreihe, welche x_0 zum Grenzwerthe hat. Der Ausdruck auf der linken Seite der Gleichung (2) kann, in Faktoren zerlegt, folgendermassen geschrieben werden:

$$a(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_{n-1}),$$

und folglich erhält man, wenn für x gesetzt wird $\frac{c_i}{c_i'}$, nachfolgende Gleichung:

$$a\left(\frac{c_i}{c_i'} - x_0\right)\left(\frac{c_i}{c_i'} - x_1\right)\cdots\left(\frac{c_i}{c_i'} - x_{n-1}\right)$$
$$= \frac{ac_i^n + a_1c_i^{n-1}c_i' + \cdots + a_{n-1}c_ic_i'^{n-1} + a_nc_i'^n}{c_i'^n}.$$

Der Zähler des rechtsstehenden Bruches ist jedenfalls eine gewisse ganze Zahl, welche von der Null verschieden sein muss, denn sonst hätte die irreduktible Gleichung (2) die rationale Wurzel $\frac{c_i}{c_i'}$. Wird dieselbe mit C bezeichnet, so folgt aus der vorigen Gleichung diese neue:

$$(3)\quad \frac{c_i}{c_i'} - x_0 = \frac{C}{a\,c_i'^{\,n}\left(\frac{c_i}{c_i'} - x_1\right)\left(\frac{c_i}{c_i'} - x_2\right)\cdots\left(\frac{c_i}{c_i'} - x_{n-1}\right)}.$$

Wächst nun i über jede Grenze hinaus, so nähert sich das Produkt

$$a\left(\frac{c_i}{c_i'} - x_1\right)\left(\frac{c_i}{c_i'} - x_2\right)\cdots\left(\frac{c_i}{c_i'} - x_{n-1}\right)$$

ohne Ende der endlichen, von Null verschiedenen Grenze

$$a(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)\cdots(x_0 - x_{n-1})$$

und bleibt demnach für jedes i sicher numerisch kleiner als eine gewisse endliche Zahl k; weil zugleich C als ganze Zahl mindestens gleich ± 1 ist, wird die rechte Seite der Gleichung (3) numerisch stets grösser sein als $\frac{1}{k c_i'^{\,n}}$. Wenn man andererseits in der Gleichung (14) der 3. Vorlesung $k = i$ setzt, und versteht unter a, a_1 die Werthe x_0, 1 resp., ersetzt ferner auf ihrer rechten Seite a_1 durch seinen Ausdruck $c_i' a_i + c_{i-1}' a_{i+1}$, so nimmt mit ihrer Hilfe die linke Seite der Gleichung (3) folgende Gestalt an:

$$\frac{c_i}{c_i'} - x_0 = (-1)^i \cdot \frac{a_{i+1}}{c_i'(c_i' a_i + c_{i-1}' a_{i+1})},$$

und demnach gilt im numerischen Sinne nachstehende Ungleichheit:

$$\frac{a_{i+1}}{c_i' a_i + c_{i-1}' a_{i+1}} > \frac{1}{k \cdot c_i'^{\,n-1}},$$

aus welcher

$$c_i' \frac{a_i}{a_{i+1}} + c_{i-1}' < k \cdot c_i'^{\,n-1},$$

also umsomehr

$$\frac{a_i}{a_{i+1}} < k \cdot c_i'^{\,n-2}$$

und wieder umsomehr die Ungleichheit

$$(4)\quad p_i < k \cdot c_i'^{\,n-2}$$

hervorgeht. Also:

Die Theilnenner eines Kettenbruches, in welchen eine positive Wurzel einer ganzzahligen irreduktibeln

algebraischen Gleichung n^{ten} Grades entwickelt werden kann, sind der Bedingung unterworfen, dass sie das Produkt aus einer gewissen endlichen Constante k in die $(n-2)^{\text{te}}$ Potenz des Nenners des nächstvorhergehenden Näherungsbruches nicht überschreiten.

2. Bildet man demnach einen Kettenbruch, für welchen die Bedingung (4) nicht erfüllbar ist, wie gross man auch die Constante k wähle, so kann der durch diesen Kettenbruch dargestellte Werth nicht die Wurzel einer irreduktibeln Gleichung n^{ten} Grades mit ganzzahligen Coefficienten sein; ebensowenig aber die Wurzel einer solchen Gleichung geringeren Grades m, denn sonst müsste ja bei einem gewissen Werthe der Constanten k die Ungleichheit $p_i < k \cdot c_i'^{m-2}$, umsomehr also auch die Ungleichheit (4) erfüllt sein.

Wenn endlich der Kettenbruch derartig gebildet wird, dass die Bedingung (4) nicht erfüllbar ist, wie gross man nicht allein k, sondern auch n wähle, so kann der Werth des Bruches nicht die Wurzel einer irreduktibeln Gleichung beliebig hohen Grades von der Form (2) sein, solange ihre Coefficienten ganzzahlig sind. Er kann infolge davon auch überhaupt nicht Wurzel irgend einer ganzzahligen algebraischen Gleichung von der Form (2) sein, und wäre demnach dann eine transcendente Zahl; denn hiesse die Gleichung: $f(x) = 0$, so wäre sie entweder irreduktibel, oder im entgegengesetzten Falle liesse sich der Ausdruck zur Linken in ein Produkt

$$f_1(x) \cdot f_2(x) \cdots$$

von rationalen irreduktibeln Faktoren zerlegen, und der Kettenbruch wäre dann Wurzel einer der irreduktibeln ganzzahligen Gleichungen der Form (2):

$$F_1(x) = 0, \quad F_2(x) = 0, \quad \cdots$$

welche aus der Gleichsetzung jener Faktoren mit Null und Fortschaffung der etwaigen Nenner in den Coefficienten entstehen, was er nicht sein kann.

Ein Kettenbruch von der angegebenen Beschaffenheit lässt sich aber in der That bilden. Wenn man z. B. jedesmal aus den vorhergehenden Theilnennern den folgenden p_i nach

dem Gesetze bestimmt, dass $p_i = c_i'^i$ sein soll, so wird, wie gross zunächst auch n gewählt werde, der wachsende Index i endlich $> n$ werden und dann $p_i > c_i'^2 \cdot c_i'^{n-2}$ bleiben; da aber c_i' mit wachsendem Index i über jede Grösse hinaus wächst, wird endlich, wie gross auch k gewählt werde, $c_i'^2 > k$ und $p_i > k \cdot c_i'^{n-2}$ bleiben, der Kettenbruch also auf keine Weise der Ungleichheit (4) genügen.

Hiermit ist also in völlig strenger und sehr einfacher Weise der Beweis für das Vorhandensein transcendenter Zahlen geliefert.

3. Nachdem dies aber festgestellt ist, entsteht nun eine engere Frage von dem höchsten Interesse: ob nämlich die beiden so wichtigen, überall in der höheren Analysis auftretenden Zahlen:

$$e = 2{,}7182818284 \cdots$$
$$\pi = 3{,}14159265 \cdots,$$

die Grundzahl des natürlichen Logarithmensystems und die Ludolph'sche Zahl, die den Umfang eines Kreises vom Durchmesser 1 misst, zu den algebraischen oder zu den transcendenten Zahlen gehören. Lambert*), der bekannte Berliner Akademiker aus der Zeit Friedrichs des Grossen, hat in dieser Hinsicht bereits bewiesen, dass die Zahl π wenigstens nicht rational sein könne, sowie dass die Zahl e nicht nur, sondern auch jede ihrer Potenzen mit rationalem Exponenten irrational sein müsse. Sein Beweis lässt allerdings in mehr als einer Beziehung zu wünschen, doch hat Legendre in seinen élémens de géometrie in der 4. Anmerkung, ausgehend von derselben Grundlage wie Lambert, einen einfachen Beweis von wünschenswertherer Strenge geliefert, der ihm zugleich noch das Mittel gewährte, zu zeigen, dass auch π^2 keine rationale Zahl, d. i. π nicht die Quadratwurzel aus einer solchen sein könne. Fügen wir hier hinzu, dass bezüglich der Zahl e Liouville**) etwas ähnliches, sogar umfassenderes nachgewiesen hat, nämlich, dass weder e selbst noch auch e^2

*) Lambert, mém. de l'acad. de Berlin, 1761, pag. 265.

**) Liouville's Journal de Mathématiques, t. 5, pag. 192.

Wurzel einer ganzzahligen quadratischen Gleichung sein kann, so haben wir im wesentlichen alles angeführt, was bis in die neue Zeit hinein mit Bezug auf unsere Frage geleistet worden war. Erst im Jahre 1874 gelang es Herrn Hermite, auf höchst geniale Weise und unter Anwendung höherer analytischer Hilfsmittel, den strengen Nachweis zu führen, dass die Zahl e eine transcendente Zahl ist.*) Auf seiner Grundlage weiter bauend, fand darauf Herr Lindemann**) im Jahre 1882 dasselbe Ergebniss für die Zahl π; sein nicht ganz leichter Beweis ist später von Herrn Weierstrass***) durch einfachere Betrachtungen ersetzt worden.

Obwohl hiernach die früheren Untersuchungen durch die zuletzt genannten allgemeinen Erkenntnisse überholt und überflüssig gemacht worden sind, theilen wir der Vollständigkeit wegen sie zunächst hier in der Kürze mit.

4. Die Grundlage der Untersuchungen von Lambert und Legendre ist ein gewisser unendlicher Kettenbruch, welchen wir daher zuerst herleiten müssen. Er ist zwar nicht von derselben Art, wie die in der 3. Vorlesung behandelten Kettenbrüche, doch sehen wir hier von der näheren Besprechung solcher allgemeineren Kettenbrüche und der Gesetze, denen sie unterliegen, ab, weil wir die darzustellenden Betrachtungen nicht zum Zwecke des theoretischen Aufbaues, sondern ausschliesslich ihres geschichtlichen Interesses wegen entwickeln.

Setzen wir

$$\varphi(z) = 1 + \frac{1}{z}y^2 + \frac{1}{z(z+1)}\frac{y^4}{1\cdot 2} + \frac{1}{z(z+1)(z+2)}\frac{y^6}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots,$$

so bestätigt sich ohne Mühe die Beziehung

$$\varphi(z) - \varphi(z+1) = \frac{y^2}{z(z+1)} \cdot \varphi(z+2),$$

und hieraus, wenn

$$\psi(z) = \frac{y^2}{z} \cdot \frac{\varphi(z+1)}{\varphi(z)} \tag{5}$$

*) Seine Untersuchung ist von ihm herausgegeben in der Schrift: Sur la fonction exponentielle, Paris 1874.

**) In den Mathematischen Annalen Bd. 20, pag. 213.

***) Sitzungsberichte der Berliner Akademie vom Jahre 1885, p. 1067.

gesetzt wird, folgende Gleichung:

$$\psi(z) = \frac{y^2}{z + \psi(z+1)},$$

aus welcher sogleich diese Kettenbruchentwicklung hervorgeht:

$$(6) \qquad \psi(z) = \frac{y^2}{z + \dfrac{y^2}{z+1 + \dfrac{y^2}{z+2 + \cdots}}}$$

Wird nun $z = \frac{1}{2}$ und $y = \frac{x}{2}$ gewählt, so findet sich

$$\varphi(z) = 1 + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \cdots = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\frac{y^2}{z}\cdot\varphi(z+1) = \frac{x}{2}\left(\frac{x}{1} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + \cdots\right)$$

$$= \frac{x}{2}\cdot\frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

und demnach aus (5) und (6) die Gleichung

$$(7) \qquad \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \cfrac{\frac{x}{2}}{\frac{1}{2} + \cfrac{\frac{x^2}{4}}{\frac{3}{2} + \cfrac{\frac{x^2}{4}}{\frac{5}{2} + \cdots}}} = \cfrac{x}{1 + \cfrac{x^2}{3 + \cfrac{x^2}{5 + \cdots}}}$$

Aus dieser Gleichung geht durch den Übergang zum Imaginären, indem nämlich x verwandelt wird in $x\sqrt{-1}$ — ein Verfahren, dessen Zulässigkeit freilich erst gerechtfertigt werden müsste — mit Hilfe der bekannten Formel der Analysis

$$\text{tang}\, x = \frac{1}{i}\,\frac{e^{xi} - e^{-xi}}{e^{xi} + e^{-xi}}$$

worin $i = \sqrt{-1}$, die neue Gleichung hervor:

$$(8) \qquad \text{tang}\, x = \cfrac{x}{1 - \cfrac{x^2}{3 - \cfrac{x^2}{5 - \cdots}}}$$

Dies sind die beiden von Lambert gegebenen Kettenbrüche, an welche wir nun anzuknüpfen haben.

5. Betrachten wir nämlich einen unendlichen Kettenbruch

$$(9) \qquad \cfrac{m}{n+\cfrac{m'}{n'+\cfrac{m''}{n''+\cfrac{m'''}{n'''+\ddots}}}}$$

in welchem sowohl die einzelnen Zähler $m, m', m'', \cdots$ als auch die einzelnen Nenner $n, n', n'', \cdots$ ganze Zahlen sind, deren letztere offenbar, indem man den jedesmaligen Zähler mit passendem Vorzeichen nimmt, positiv vorausgesetzt werden dürfen, so wird der Werth des Kettenbruchs wesentlich irrational sein müssen, sobald die einzelnen Brüche $\frac{m}{n}, \frac{m'}{n'}, \frac{m''}{n''}, \cdots$ numerisch kleiner sind als Eins.

Um sich hiervon zu überzeugen, bemerke man zunächst, dass der Kettenbruch keinenfalls grösser als Eins werden kann. Denn, da $\frac{m}{n}$ numerisch kleiner als Eins sein soll, so ist der numerische Werth von m kleiner als $n-1$; $n+\frac{m'}{n'}$ aber ist sicher $> n-1$, also $\cfrac{m}{n+\cfrac{m'}{n'}}$ numerisch kleiner als Eins. Dasselbe gilt aus ähnlichen Gründen von dem Bruche $\cfrac{m'}{n'+\cfrac{m''}{n''}}$; folglich ist $n+\cfrac{m'}{n'+\cfrac{m''}{n''}}$ grösser als $n-1$ und demnach $\cfrac{m}{n+\cfrac{m'}{n'+\cfrac{m''}{n''}}}$ numerisch unter der Einheit, u. s. f.; wie weit der Kettenbruch auch fortgesetzt werde, er wird niemals die Einheit übertreffen. Das Gleiche wird aber auch von denjenigen Kettenbrüchen gelten, welche aus dem vorigen hervorgehn, wenn man einen oder mehrere der Brüche am Anfange desselben unterdrückt.

Auch der Einheit gleich sein kann der ins Unendliche fortgesetzte Kettenbruch, resp. die letztgenannten Theile des-

selben, nur in einem einzigen Falle. Soll nämlich, wo zur Abkürzung ω für den Kettenbruch

$$\cfrac{m'}{n'+\cfrac{m''}{n''+\cfrac{m'''}{n'''+\ddots}}}$$

steht, $\frac{m}{n+\omega} = \pm 1$ oder $\frac{\pm m}{n+\omega} = 1$ sein, so folgt aus $\pm m = n + \omega$ nothwendig, dass $\omega = -1$ also $n = \pm m + 1$ sei; dann müsste, unter ω' den Kettenbruch

$$\cfrac{m''}{n''+\cfrac{m'''}{n'''+\ddots}}$$

verstanden, $\frac{m'}{n'+\omega'} = -1$, $m' = -n' - \omega'$ sein. Hieraus folgt aber nothwendig $\omega' = -1$ also $n' = -m' + 1$ u. s. f., sodass der Kettenbruch ω nur dann die Einheit zum Grenzwerthe haben kann, wenn er die Gestalt hat:

$$\cfrac{m}{\pm m + 1 + \cfrac{m'}{-m' + 1 + \cfrac{m''}{-m'' + 1 + m''' \cdots}}}$$

Da jedoch die Kettenbrüche, welche wir hier zu betrachten haben werden, diese Gestalt nicht besitzen, dürfen wir von diesem Ausnahmefalle absehn und dann sagen: Der Kettenbruch (9) und die daraus durch Unterdrückung von 1, 2, 3, ··· Brüchen am Anfange hergeleiteten Kettenbrüche sind sämmtlich numerisch kleiner als Eins.

Wollte man nun gegen die Behauptung des Satzes annehmen, der Kettenbruch (9) sei rational, nämlich gleich $\frac{b}{a}$:

$$\frac{b}{a} = \cfrac{m}{n+\cfrac{m'}{n'+\cfrac{m''}{n''+\ddots}}}$$

so bestimme man Werthe c, d, e, ··· durch nachstehende Gleichungen:

$$\frac{c}{b} = \cfrac{m'}{n' + \cfrac{m''}{n'' + \cfrac{m'''}{n''' + \cdots}}}$$

$$\frac{d}{c} = \cfrac{m''}{n'' + \cfrac{m'''}{n''' + \cdots}}$$

u. s. w. Dem eben Gesagten zufolge bilden die Werthe b, c, d, e, $\cdots$ eine unbegrenzte Reihe abnehmender Werthe. Ferner aber finden sich aus den Gleichungen

$$\frac{b}{a} = \frac{m}{n + \frac{c}{b}}, \quad \frac{c}{b} = \frac{m'}{n' + \frac{d}{c}} \quad \text{u. s. w.}$$

die folgenden:

$$c = ma - nb, \quad d = m'b - n'c, \quad e = m''c - n''d, \quad \cdots$$

aus welchen sich c, d, e, $\cdots$ als ganze Zahlen ergeben. Man gelangt also zu einer unbegrenzten Reihe numerisch abnehmender ganzzahliger Werthe, welche nicht möglich ist, und damit ist die Behauptung erwiesen.

Dieselbe Behauptung bleibt auch richtig, wenn der Kettenbruch (9) nicht vom Anfange, sondern erst von einer späteren Stelle an die Bedingungen des vorigen Satzes erfüllt. Erfüllt er sie z. B. erst vom Gliede $\frac{m'''}{n'''}$ an, so würde der Kettenbruch

$$\omega = \cfrac{m'''}{n''' + \cfrac{m''''}{n'''' + \cdots}}$$

nach dem vorigen Satze irrational sein, und daher auch, wie leicht zu sehen, der Bruch

$$\cfrac{m}{n + \cfrac{m'}{n' + \cfrac{m''}{n'' + \omega}}}$$

d. h. der ganze Kettenbruch (9), nicht rational sein können.

6. Nachdem diese Hilfsbetrachtung zu Ende geführt ist, wollen wir nun annehmen, in den Kettenbrüchen (7) und (8) werde unter x ein rationaler Werth $\frac{p}{q}$ verstanden. Sie werden

dann offenbar von einer gewissen Stelle an die Bedingungen des Hilfssatzes erfüllen, da die Brüche

$$\frac{p^2}{1\cdot q^2},\quad \frac{p^2}{3\cdot q^2},\quad \frac{p^2}{5\cdot q^2},\quad \cdots$$

von einer bestimmten Stelle an kleiner als Eins bleiben. Hieraus schliessen wir dann also sogleich, dass weder e^x noch tang x gleichzeitig mit x rational sein können, oder anders ausgedrückt: Jede Potenz von e mit rationalem Exponenten ist irrational. Desgleichen ist die Tangente jedes rationalen Bogens irrational.

Da nun für $x = \frac{\pi}{4}$ gefunden wird $\text{tang}\, x = \text{tang}\, \frac{\pi}{4} = 1$ also gleich einer rationalen Zahl, so kann $\frac{\pi}{4}$ und folglich auch π nicht einer rationalen Zahl gleich sein. Wir schliessen demnach: Die Zahl π ist irrational.

Diesen Lambert'schen Sätzen konnte Legendre, wie schon bemerkt, vermittelst seines Hilfssatzes noch einen weiteren hinzufügen. Die Gleichung (8) giebt nämlich, wenn $x = \pi$ gesetzt wird, die folgende:

$$0 = \cfrac{\pi}{1 - \cfrac{\pi^2}{3 - \cfrac{\pi^2}{5 - \cdots}}}$$

welche nicht anders bestehen kann, als wenn der die Zahl π theilende Ausdruck unendlich gross und folglich

$$\cfrac{3 - \pi^2}{5 - \cfrac{\pi^2}{7 - \cdots}} = 0$$

ist. Demnach kann π^2 keine rationale Zahl sein, denn sonst wäre der Kettenbruch von der Art des Kettenbruches (9) und könnte demnach nicht den rationalen Werth 0 haben, den er doch besitzt.

7. Die Irrationalität der Zahl e selbst kann übrigens weit einfacher mittels der bekannten, diese Zahl definirenden Reihe

$$e = 2 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \cdots$$

nachgewiesen werden; doch scheint dieselbe nicht geeignet, um auch das allgemeinere Ergebniss von Lambert daraus zu gewinnen. Dagegen hat Liouville sie benutzt, um zu zeigen, dass weder e selbst, noch auch e^2 Wurzel einer ganzzahligen quadratischen Gleichung sein kann.

Aus der Reihe

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots$$

findet man zunächst ohne Mühe, wenn man sie nicht ins Unendliche fortsetzt, sondern nach der n^{ten} Potenz abbricht, folgende Gleichung:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \cdots + \frac{x^m}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots m} + \cdots + \frac{x^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n} + \frac{x^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n} \cdot \frac{\Theta x}{n + 1 - x}, \tag{10}$$

in welcher Θ einen positiven echten Bruch bezeichnet. Für $x = 1$ liefert diese Formel den Werth von e unter der Form:

$$e = 2 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots m} + \cdots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n} \cdot \frac{\Theta}{n}, \tag{11}$$

wobei n eine beliebig grosse Zahl bedeutet. Wäre demnach e eine rationale Zahl, so dürfte man unter n auch den Nenner des möglichst gekürzten Bruches $e = \frac{m}{n}$ verstehen, und erhielte sodann aus der vorigen Gleichung, indem man sie mit $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$ multiplicirt und die so entstehenden ganzzahligen Bestandtheile sämmtlich nach links schafft, eine Gleichung von der Form: $N = \frac{\Theta}{n}$, in welcher links eine ganze Zahl N, rechts aber ein echter Bruch steht, was widersinnig ist. Die Zahl e ist daher jedenfalls irrational.

Nun setze man ferner in (10) $x = -1$ und bezeichne -1 mit ε, so kommt

$$e^{-1} = 1 + \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{1 \cdot 2} + \cdots + \frac{\varepsilon^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n} + \frac{\varepsilon^{n+1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n} \cdot \frac{\Theta'}{n + 2}, \tag{12}$$

wobei wieder Θ' einen positiven echten Bruch bezeichnet, welcher aber mit Θ in der Gleichung (11) nicht dasselbe zu sein braucht. Nehmen wir nun an, e sei Wurzel einer quadratischen Gleichung

$$ax^2 - bx + c = 0$$

mit ganzzahligen Coefficienten a, b, c, so dürfen wir zuvörderst den ersten der Coefficienten als positiv voraussetzen, und müssten dann also

$$ae^2 - be + c = 0$$

oder auch

$$ae + ce^{-1} = b$$

haben, eine Gleichung, welche nach Einsetzung der Reihen (11) und (12) für e und e^{-1} folgende Gestalt erhält:

$$a\left(1 + 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \cdots + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}\right)$$
$$+ c\left(1 + \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{1\cdot 2} + \cdots + \frac{\varepsilon^n}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}\right)$$
$$+ a\cdot\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}\cdot\frac{\Theta}{n} + c\cdot\frac{\varepsilon^{n+1}}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}\cdot\frac{\Theta'}{n+2} = b.$$

Hieraus folgt aber durch Multiplikation mit $1\cdot 2\cdot 3\cdots n$ und, wenn die ganzzahligen Bestandtheile darauf nach rechts geschafft werden,

$$a\cdot\frac{\Theta}{n} + c\varepsilon^{n+1}\cdot\frac{\Theta'}{n+2} = N,$$

unter N eine gewisse ganze Zahl verstanden. Nun liess sich n zunächst so wählen, dass $c\varepsilon^{n+1}$ positiv wird. Hierzu ist ja nur nöthig, n gerade oder ungerade zu wählen, jenachdem c negativ oder positiv ist. Ferner aber gilt unsere Betrachtung, wie grofs diese so gewählte Zahl n auch sei; mit wachsendem n wird aber endlich der positive Ausdruck links kleiner als die Einheit, während die Zahl N rechts immer eine ganze Zahl bleibt; dies ist ein Widerspruch und folglich kann e nicht Wurzel einer quadratischen Gleichung mit ganzzahligen Coefficienten sein.

Dasselbe gilt nun aber auch für e^2. Um dies zu erweisen, erinnern wir zuerst an eine bekannte Formel der Zahlentheorie. Bezeichnet $E(x)$ das grösste Ganze, welches in

dem positiven Werthe x enthalten ist, und m eine positive ganze Zahl, so giebt die Summe

$$E\left(\frac{m}{2}\right) + E\left(\frac{m}{4}\right) + E\left(\frac{m}{8}\right) + \cdots,$$

fortgesetzt, bis sie von selber abbricht, die Anzahl an, wie oft der Faktor 2 in dem Produkte $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots m$ enthalten ist. Insbesondere findet sich hiernach, wenn $m = 2^i$ ist, der Werth jener Summe oder diese Anzahl gleich

$$2^{i-1} + 2^{i-2} + \cdots + 2 + 1$$

d. i. $2^i - 1$ d. i.

$$m - 1,$$

und wenn $m = 2^i + 1$ ist, gleich $2^i - 1$ d. i.

$$m - 2.$$

Allgemein aber ist jene Summe selbstverständlich kleiner als die unendliche Reihe

$$\frac{m}{2} + \frac{m}{4} + \frac{m}{8} + \cdots,$$

deren Werth m ist. Hebt man demnach im Bruche

$$\frac{2^m}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots m}$$

nach Möglichkeit den Faktor 2^* aus Zähler und Nenner heraus, so bleibt im Zähler eine Potenz von 2, etwa 2^{α_m} mit positivem Exponenten α_m, welcher speciell in den beiden hervorgehobenen Fällen den Werth 1 bez. 2 haben wird; der so vereinfachte Bruch möge $\frac{2^{\alpha_m}}{p_m}$ genannt werden. Ist $n > m$ und setzt man, in gleicher Weise vereinfacht,

$$\frac{2^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n} = \frac{2^{\alpha_n}}{p_n},$$

so wird der Nenner p_n offenbar alle in p_m verbliebenen, nämlich ungeraden Faktoren ebenfalls enthalten, also durch p_m theilbar sein müssen.

Dies vorausgeschickt, wollen wir nun die Annahme untersuchen, dass e^2 Wurzel der Gleichung

$$ax^2 - bx + c = 0$$

mit ganzzahligen Coefficienten sei. Man müsste dann

$$ae^2 + ce^{-2} = b$$

haben, oder nach Einsetzen der Werthe von e^2 und e^{-2}, nämlich

$$e^2 = 1 + \frac{2}{1} + \cdots + \frac{2^m}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots m} + \cdots + \frac{2^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n} + \frac{2^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n} \cdot \frac{2\Theta}{n-1}$$

oder

$$e^{+2} = 1 + \frac{2}{1} + \cdots + \frac{2^{\alpha_m}}{p_m} + \cdots + \frac{2^{\alpha_n}}{p_n} + \frac{2^{\alpha_n}}{p_n} \cdot \frac{2\Theta}{n-1}$$

und

$$e^{-2} = 1 + \frac{2\varepsilon}{1} + \cdots + \frac{2^{\alpha_m} \cdot \varepsilon^m}{p_m} + \cdots + \frac{2^{\alpha_n} \varepsilon^n}{p_n} + \frac{2^{\alpha_n} \varepsilon^{n+1}}{p_n} \cdot \frac{2\Theta'}{n+3},$$

folgende Gleichung:

$$a\left(1 + \frac{2}{1} + \cdots + \frac{2^{\alpha_m}}{p_m} + \cdots + \frac{2^{\alpha_n}}{p_n}\right) + c\left(1 + \frac{2\varepsilon}{1} + \cdots + \frac{2^{\alpha_m} \varepsilon^m}{p_m} + \cdots + \frac{2^{\alpha_n} \varepsilon^n}{p_n}\right) + a \cdot \frac{2^{\alpha_n}}{p_n} \cdot \frac{2\Theta}{n-1} + c \cdot \frac{2^{\alpha_n} \varepsilon^{n+1}}{p_n} \cdot \frac{2\Theta'}{n+3} = b.$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit p_n, so werden alle Glieder der in a und in c multiplicirten Klammern ganze Zahlen, und wenn man dann alle ganzzahligen Bestandtheile nach rechts schafft, entsteht folgende Gleichung:

$$(13) \qquad a \cdot 2^{\alpha_n} \cdot \frac{2\Theta}{n-1} + c \cdot 2^{\alpha_n} \cdot \varepsilon^{n+1} \cdot \frac{2\Theta'}{n+3} = N,$$

unter N eine gewisse ganze Zahl verstanden. Wir dürfen hierbei wieder unter n eine gerade oder ungerade Zahl verstehen, jenachdem c negativ oder positiv ist, wodurch alsdann die beiden Glieder zur Linken wesentlich positiv werden. Dies mag z. B. in der Weise bewirkt werden, dass wir $n = 2^i$ wählen, wenn c negativ, $n = 2^i + 1$, wenn c positiv ist. Dem entsprechend würde dann der Werth der linken Seite durch den Ausdruck

$$(14)\quad 4\left(\frac{a\Theta}{n-1}+\frac{c\varepsilon^{n+1}\cdot\Theta'}{n+3}\right)\text{ resp. }8\left(\frac{a\Theta}{n-1}+\frac{c\varepsilon^{n+1}\Theta'}{n+3}\right)$$

gegeben. Wir dürfen aber endlich bei unserer Betrachtung das so gewählte n beliebig gross annehmen, und werden dies bei der bereits getroffenen Wahl von n in beiden Fällen einfach dadurch erreichen, dass wir den Exponenten i hinreichend gross wählen. Da hierbei mit dem unendlich wachsenden n die Ausdrücke (14) unendlich abnehmen werden, sinken sie schliesslich, ohne Null zu sein, unter die Einheit herab, während N eine ganze Zahl bleibt. Die Gleichung (13) ergiebt dann einen Widerspruch, und folglich ist damit der Beweis der Behauptung erbracht.

Sechste Vorlesung.

Hermite's Untersuchung der Zahl e.

1. Die in der vorigen Vorlesung entwickelten, die Zahlen e und π betreffenden Sätze sind nur ganz besondere Fälle des allgemeinen Ergebnisses, welches für die Zahl e von Hermite*), für die Zahl π von Lindemann festgestellt worden ist, dass nämlich jede dieser beiden Zahlen eine transcendente Zahl ist. Wir werden zunächst hier versuchen, von den Hermite'schen Betrachtungen, welche auch denen von Lindemann zum Grunde liegen, eine zusammenhängende Darstellung zu geben.

Versteht man unter A die Funktion $\sin x$ oder in bekannter Reihenform

$$A=\frac{x}{1}-\frac{x^3}{1\cdot2\cdot3}+\frac{x^5}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}-\cdots,$$

kürzer, mit Anwendung des Summenzeichens,

---

*) Ausser der schon genannten Schrift Sur la fonction exponentielle kommen hier auch noch in Betracht die beiden kleinen Abhandlungen im Journal f. d. r. u. a. Mathematik Bd. 76 pag. 303 u. 342.

$$(1) \qquad A = \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{(-1)^k \cdot x^{2k+1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (2k+1)},$$

und bildet hieraus die unbegrenzte Reihe von Grössen A_1, A_2, A_3, $\cdots$ nach dem Gesetze, welches die Formeln ausdrücken:

$$A_1 = \int_0^x x A \, dx, \quad A_2 = \int_0^x x A_1 \, dx, \quad \cdots$$

allgemein

$$(2) \qquad A_n = \int_0^x x A_{n-1} \, dx,$$

so findet sich vermittelst der für A gegebenen Reihenentwicklung (1) ohne Mühe

$$(3) \quad A_n = x^{2n+1} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 2k} \cdot \frac{x^{2k}}{(2k+1)(2k+3) \cdots (2k+2n+1)}.$$

Wird andererseits $\mathfrak{A} = \frac{\sin x}{x}$ gesetzt und hieraus die Reihe der Grössen $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_3$, $\cdots$ durch die Gleichungen

$$\mathfrak{A}_1 = -\frac{1}{x}\frac{d\mathfrak{A}}{dx}, \quad \mathfrak{A}_2 = -\frac{1}{x}\frac{d\mathfrak{A}_1}{dx}, \quad \cdots$$

allgemein

$$(4) \qquad \mathfrak{A}_n = -\frac{1}{x}\frac{d\mathfrak{A}_{n-1}}{dx}$$

hergeleitet, so ergiebt sich gleichfalls unschwer

$$(5) \quad \mathfrak{A}_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)(2k+2) \cdots (2k+2n+1)} \cdot \frac{x^{2k}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 2k},$$

d. h. es ist

$$(6) \qquad \mathfrak{A}_n = \frac{A_n}{x^{2n+1}},$$

folglich auch

$$(7) \qquad \mathfrak{A}_{n+1} = \frac{A_{n+1}}{x^{2n+3}}.$$

Wird nun in (4) $n+1$ statt n, darauf die Werthe (6) und (7) eingesetzt und die aus der Definitionsgleichung (2) hervorgehende Beziehung

$$\frac{dA_n}{dx} = xA_{n-1}$$

beachtet, so findet sich folgende interessante Recursionsformel:

(8) $$A_{n+1} = (2n+1)A_n - x^2 \cdot A_{n-1}.$$

Die hieraus für $n = 1, 2, 3, \cdots$ entstehenden Gleichungen:

$$A_2 = 3A_1 - x^2 A$$
$$A_3 = 5A_2 - x^2 A_1$$
$$A_4 = 7A_3 - x^2 A_2$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

können folgendermassen geschrieben werden:

$$\frac{x^2 A}{A_1} = 3 - \frac{x^2}{x^2 \frac{A_1}{A_2}}$$
$$\frac{x^2 A_1}{A_2} = 5 - \frac{x^2}{x^2 \frac{A_2}{A_3}}$$
$$\frac{x^2 A_2}{A_3} = 7 - \frac{x^2}{x^2 \frac{A_3}{A_4}}$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

und liefern daher durch allmähliches Einsetzen den Kettenbruch

$$\frac{x^2 A}{A_1} = 3 - \cfrac{x^2}{5 - \cfrac{x^2}{7 - \cdots}}$$

Aber aus $A = \sin x$ folgt sogleich

$$A_1 = \int_0^x xA\,dx = \sin x - x \cos x,$$

folglich ist

$$\frac{\sin x - x \cos x}{\sin x} = \cfrac{x^2}{3 - \cfrac{x^2}{5 - \cfrac{x^2}{7 - \cdots}}}$$

und hieraus

$$\operatorname{tang} x = \cfrac{x}{1 - \cfrac{x^2}{3 - \cfrac{x^2}{5 - \cfrac{x^2}{7 - \cdots}}}}$$

So sind wir zunächst auf anderem Wege zu dem Kettenbruche zurückgeführt worden, welchen für tang x schon Lambert angegeben hatte.

2. Aber wir wollen uns nun genauer mit dem Ausdrucke A_n beschäftigen. Man kann statt desselben einen zweiten von ganz anderer Gestalt aufstellen, wenn man die Integrationen in den Definitionsgleichungen ohne die Reihenentwicklung für $\sin x$, mit Anwendung vielmehr der partiellen Integration ausführt. Man findet so zunächst

$$A_1 = \int_0^x x \sin x \, dx = \sin x - x \cos x$$

$$A_2 = \int_0^x x A_1 \, dx = (3 - x^2) \sin x - 3x \cos x$$

$$A_3 = \int_0^x x A_2 \, dx = (15 - 6x^2) \sin x - (15x - x^3) \cos x$$

u. s. w. Es stellt sich hiernach für A_n die allgemeine Form heraus:

$$A_n = \psi(x) \cdot \sin x + \chi(x) \cdot \cos x, \tag{9}$$

wo $\psi(x)$ eine gerade ganze Funktion vom n^{ten} bez. $(n-1)^{\text{ten}}$ Grade ist, jenachdem n gerade oder ungerade, $\chi(x)$ eine ungerade ganze Funktion vom $(n-1)^{\text{ten}}$ oder n^{ten} Grade je nach den beiden unterschiedenen Fällen ist; die Coefficienten dieser Funktionen sind ganze Zahlen. Wir wollen vor allen Dingen das Induktionsgesetz bestätigen.

Dazu bemerken wir zuerst die leicht durch partielle Integration zu erhaltenden Formeln

$$\int \varphi(x) \sin x \, dx = \sin x \cdot \Phi'(x) - \cos x \cdot \Phi(x)$$

$$\int \varphi(x) \cos x \, dx = \sin x \cdot \Phi(x) + \cos x \cdot \Phi'(x),$$

in welchen zur Abkürzung

$$\Phi(x) = \varphi(x) - \varphi''(x) + \varphi^{(4)}(x) - \cdots$$

gesetzt ist. Die Funktionen $\Phi(x)$, $\Phi'(x)$ in diesen Formeln sind ganze Funktionen von gleichem, bezw. um 1 geringeren Grade wie die Funktion $\varphi(x)$. Bei der Integration von 0 bis x giebt die erste Formel die folgende:

$$\int_0^x \varphi(x) \sin x \, dx = \sin x \cdot \Phi'(x) - \cos x \cdot \Phi(x) + \Phi(0),$$

also, so oft $\Phi(0)$ Null ist, was z. B. eintrifft, wenn $\varphi(x)$ und folglich seine Ableitungen gerader Ordnung also auch $\Phi(x)$ ungerade Funktionen von x sind,

$$(10) \qquad \int_0^x \varphi(x) \sin x \, dx = \sin x \cdot \Phi'(x) - \cos x \cdot \Phi(x).$$

Ebenso ergiebt die zweite Formel, wenn $\varphi(x)$ und folglich seine Ableitungen gerader Ordnung gerade Funktionen, $\Phi'(x)$ also eine ungerade Funktion von x ist,

$$(11) \qquad \int_0^x \varphi(x) \cos x \, dx = \sin x \cdot \Phi(x) + \cos x \cdot \Phi'(x).$$

Nehmen wir nunmehr an, das für A_n ausgesprochene Gesetz sei bis zu einem bestimmten Index n hin bestätigt, so würde sich finden

$$A_{n+1} = \int_0^x x A_n \, dx = \int_0^x (x\psi(x) \sin x + x\chi(x) \cos x) \, dx.$$

Ist nun zuerst n eine gerade Zahl, so wäre $\psi(x)$ eine gerade Funktion vom n^{ten}, demnach $x\psi(x)$ eine ungerade Funktion vom $(n+1)^{\text{ten}}$ Grade, und $\chi(x)$ eine ungerade Funktion $(n-1)^{\text{ten}}$, demnach $x\chi(x)$ eine gerade Funktion n^{ten} Grades. In Anwendung der Hilfsformeln (10) und (11) erhielte man also zwei Gleichungen von der Form

$$\int_0^x x\psi(x) \sin x \, dx = \sin x \cdot \Psi'(x) - \cos x \cdot \Psi(x)$$

$$\int_0^x x\chi(x) \cos x \, dx = \sin x \cdot X(x) + \cos x \cdot X'(x);$$

$\Psi(x)$, $X(x)$ bedeuten dabei, was aus $\Phi(x)$ entsteht, wenn bezw. $x\psi(x)$ und $x\chi(x)$ für $\varphi(x)$ gesetzt werden. $\Psi(x)$ muss daher eine ganzzahlige ungerade Funktion $(n+1)^{\text{ten}}$ und demnach $\Psi'(x)$ eine gerade Funktion n^{ten} Grades, $X(x)$ eine ganzzahlige gerade Funktion n^{ten} Grades, demnach $X'(x)$ eine ungerade Funktion $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades sein. Zieht man daher zusammen:

$$A_{n+1} = \sin x \cdot \left(\Psi'(x) + X(x)\right) - \cos x \cdot \left(\Psi(x) - X(x)\right),$$

so ist nun, wo der Index $n+1$ eine ungerade Zahl ist, der $\sin x$ in eine gerade Funktion n^{ten}, der $\cos x$ in eine ungerade Funktion $(n+1)^{\text{ten}}$ Grades multiplicirt, das Induktionsgesetz also um einen Schritt weiter bestätigt. Da dasselbe Verfahren auch in dem Falle eines ungeraden n anwendbar ist und zum Ziele führt, ist also der allgemeine Nachweis geführt, dass das bezüglich A_n aufgestellte Gesetz ohne Ausnahme giltig ist.

3. Nun kann man leicht den ersten Ausdruck (3) für A_n in die Gestalt eines bestimmten Integrales überführen. In der That giebt die partielle Integration zunächst folgende Reduktionsformel:

$$(12)\quad \int_0^1 (1-z^2)^n \cdot z^{2k} dz = \frac{2k-1}{2n+2k+1} \cdot \int_0^1 (1-z^2)^n \cdot z^{2(k-1)} dz,$$

durch deren wiederholte Anwendung die Gleichung hervorgeht:

$$(13)\quad \int_0^1 (1-z^2)^n \cdot z^{2k} dz = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)}{(2n+3)(2n+5)\cdots(2n+2k+1)} \cdot \int_0^1 (1-z^2)^n dz.$$

Es ist aber

$$\int_0^1 (1-z^2)^n dz = \int_0^1 (1-z^2)^{n-1} dz - \int_0^1 z^2 (1-z^2)^{n-1} dz,$$

und die Hilfsformel (12) liefert, wenn darin $n-1$ statt n und $k=1$ gesetzt wird,

$$\int_0^1 z^2(1-z^2)^{n-1}\,dz = \frac{1}{2n+1}\cdot\int_0^1 (1-z^2)^{n-1}\,dz;$$

hiernach geht die vorige Gleichung über in

$$\int_0^1 (1-z^2)^n\,dz = \frac{2n}{2n+1}\cdot\int_0^1 (1-z^2)^{n-1}\,dz$$

und durch wiederholte Anwendung dieser Formel in

$$\int_0^1 (1-z^2)^n\,dz = \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n+1)}.$$

Demnach erhält man die Formel (13) in folgender Gestalt:

$$(14)\quad \int_0^1 (1-z^2)^n\cdot z^{2k}\,dz = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)\cdot 2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n+2k+1)}.$$

Betrachten wir nun das Integral

$$\int_0^1 (1-z^2)^n\cdot\cos xz\,dz$$

und ersetzen darin $\cos xz$ durch seine bekannte Reihe

$$1-\frac{x^2z^2}{1\cdot 2}+\frac{x^4z^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}-\frac{x^6z^6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}+\cdots$$

oder kürzer, mit Anwendung des Summenzeichens,

$$\cos xz = \sum_0^\infty{}_k \frac{(-1)^k\cdot x^{2k}z^{2k}}{1\cdot 2\cdot 3\cdots 2k},$$

sodass das Integral die Gestalt annimmt:

$$\sum_0^\infty{}_k \frac{(-1)^k x^{2k}}{1\cdot 2\cdot 3\cdots 2k}\cdot\int_0^1 (1-z^2)^n\cdot z^{2k}\,dz,$$

so findet man sogleich bei Anwendung der Formel (14) die Beziehung:

$$\int_0^1 (1-z^2)\cdot\cos xz\,dz$$

$$=\sum_0^\infty{}_k \frac{(-1)^k x^{2k}}{1\cdot 2\cdot 3\cdots 2k}\cdot\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}{(2k+1)(2k+3)\cdots(2k+2n+1)},$$

d. h. nach (3) und (9) folgende Gleichung:

$$(15)\quad \psi(x)\sin x + \chi(x)\cos x = \frac{x^{2n+1}}{2\cdot 4\cdots 2n}\cdot\int_0^1 (1-z^2)^n \cos xz\,dz.$$

Hierin hat, wenn wir n als gerade Zahl voraussetzen, $\chi(x)$ die Bedeutung einer ungeraden Funktion vom Grade $n-1$, also die Gestalt

$$\chi(x) = x\cdot X(x^2),$$

wenn unter $X(x^2)$ eine ganze und ganzzahlige Funktion des Grades $\frac{n}{2}-1$ von x^2 verstanden wird.

4. Aus der so nach Hermite gegebenen Gleichung (15) lassen sich mit Leichtigkeit die Sätze wieder finden, welche Lambert und Legendre bezüglich der Zahl π aus anderer Quelle hergeleitet haben: dass nämlich weder π selbst noch π^2 rational sein kann.

Denn setzt man

$$X(x^2) = Ax^{n-2} + A_1x^{n-4} + \cdots + A_{\frac{n}{2}-1}$$

und nimmt zunächst an, π sei rational, $\pi = \frac{b}{a}$, so ergiebt die Gleichung (15), wenn darin $x = \pi$ gesetzt wird,

$$-X(\pi^2) = \frac{\pi^{2n}}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}\cdot\int_0^1 (1-z^2)^n\cdot\cos\pi z\,dz$$

oder

$$(16)\quad N = \frac{1}{a^2}\,\frac{\left(\frac{b^2}{2a}\right)^n}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}\cdot\int_0^1 (1-z^2)^n\cos\pi z\,dz,$$

wenn N eine ganze Zahl bedeutet. Wäre dagegen π^2 eine rationale Zahl, $\pi^2 = \frac{\beta}{\alpha}$, so fände man auf demselben Wege:

$$(17)\quad N' = \frac{1}{\alpha}\cdot\frac{\left(\frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}}\right)^n}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}\cdot\int_0^1 (1-z^2)^n\cos\pi z\,dz,$$

wo auch N' eine ganze Zahl bedeutet.

Das Integral ist < 1, da die Funktion unter dem Integralzeichen dauernd numerisch unter 1 bleibt; dass es nicht 0 ist, lässt sich einsehen, wenn man es zerlegt in

$$\int_0^{\frac{1}{2}} (1 - z^2)^n \cdot \cos \pi z \, dz + \int_{\frac{1}{2}}^{1} (1 - z^2)^n \cdot \cos \pi z \, dz;$$

infolge des bekannten Mittelwerthsatzes aus der Theorie der bestimmten Integrale lässt sich das erste setzen gleich

$$(1 - \zeta^2)^n \cdot \int_0^{\frac{1}{2}} \cos \pi z \, dz = (1 - \zeta^2)^n \cdot \frac{1}{\pi},$$

das zweite gleich

$$(1 - \zeta'^2)^n \cdot \int_{\frac{1}{2}}^{1} \cos \pi z \, dz = -(1 - \zeta'^2)^n \cdot \frac{1}{\pi},$$

wo ζ zwischen 0 und $\frac{1}{2}$, ζ' zwischen $\frac{1}{2}$ und 1 liegt; da hiernach $1 - \zeta^2 > 1 - \zeta'^2$ ist, kann das ganze Integral nicht verschwinden. Die Gleichungen (16) und (17), in welchen die (gerade) Zahl n beliebig gross gedacht werden kann, werden aber schliesslich unmöglich, wenn sie hinreichend gross gedacht wird. Denn bekanntlich nähert sich der Ausdruck $\frac{x^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}$, wie gross der bestimmte Werth von x auch sei, mit unendlich wachsendem n der Null; für ein hinreichend grosses n werden demnach die Faktoren vor dem Integrale in den Formeln (16) und (17) beliebig klein sein, bei wachsendem n wird daher ein Augenblick eintreten, wo die rechten Seiten dieser Formeln, ohne zu verschwinden, unter die Einheit herabsinken, also keiner ganzen Zahl gleich sein können. Die Annahmen sind demnach unzulässig.

5. Im Vorigen haben wir nur die ersten Schritte auf dem von Hermite eröffneten Wege gethan und wollen nunmehr denselben weiter verfolgen.

Aus jeder der Grössen A_n bilden wir unbegrenzt viele andere A'_n, A''_n, A'''_n, $\cdots$, indem wir definiren:

$$A_n' = \int_0^x A_n\,dx, \quad A_n'' = \int_0^x A_n'\,dx, \quad A_n''' = \int_0^x A_n''\,dx, \quad \cdots$$

Wählen wir hierbei zuerst für A_n den Ausdruck (3) in Gestalt einer Reihe:

$$A_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)(2k+3)\cdots(2k+2n+1)} \cdot \frac{(-1)^k x^{1+2k+2n}}{1\cdot 2\cdot 3\cdots 2k},$$

so findet sich ohne Schwierigkeit

$$A_n^i = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k+2)(2k+4)\cdots(2k+2n)\cdot(-1)^k x^{2k+2n+i+1}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots(2k+2n+i+1)}$$

oder, wenn man setzt

$$\mathfrak{A}_n^i = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k+2)(2k+4)\cdots(2k+2n)\cdot(-1)^k x^{2k}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots(2k+2n+i+1)}, \tag{18}$$

$$A_n^i = x^{2n+i+1}\cdot \mathfrak{A}_n^i. \tag{19}$$

Aus der Formel (18) ergiebt sich, wenn darin $n+1$ statt n gesetzt wird,

$$\mathfrak{A}_{n+1}^i = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k+2)(2k+4)\cdots(2k+2n+2)\cdot(-1)^k x^{2k}}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(2k+2n+i+1)(2k+2n+i+3)}.$$

Andererseits findet sich, wenn $\mathfrak{A}_n^i$ nach x differenzirt wird, wobei das $k=0$ entsprechende Glied verschwindet,

$$\frac{d\mathfrak{A}_n^i}{dx} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k(2k+2)\cdots(2k+2n)\cdot(-1)^k x^{2k-1}}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(2k+2n+i+1)}$$

oder, wenn der Summationsbuchstabe k durch $k+1$ ersetzt wird,

$$-\frac{d\mathfrak{A}_n^i}{dx} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k+2)(2k+4)\cdots(2k+2n+2)\cdot(-1)^k x^{2k+1}}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(2k+2n+i+1)(2k+2n+i+3)}.$$

Durch Vergleichung mit $\mathfrak{A}_{n+1}^i$ erhält man sogleich die Beziehung

$$\mathfrak{A}_{n+1}^i = -\frac{1}{x}\cdot\frac{d\mathfrak{A}_n^i}{dx},$$

welche mit Rücksicht auf die Gleichung (19), die für jedes n besteht, leicht in die Form

$$A^i_{n+1} = (2n+i+1)A^i_n - x \cdot \frac{dA^i_n}{dx}$$

gebracht werden kann. Nach den Definitionsgleichungen für die Grössen A^i_n ist aber $\frac{dA^i_n}{dx} = A^{i-1}_n$, also nimmt die vorstehende Gleichung folgende Gestalt an:

$$A^i_{n+1} = (2n+i+1)A^i_n - x \cdot A^{i-1}_n. \tag{20}$$

Diese eigenthümliche Recursionsformel, welche gestattet, die Grössen A höherer Ordnung, d. h. mit grösseren Indices, aus denen geringerer Ordnung zu berechnen, verdient an sich volle Aufmerksamkeit. Beschränken wir uns z. B. auf den Index $i = 1$, so würde sie lauten:

$$A'_{n+1} = (2n+2)A'_n - xA_n$$

und würde dazu dienen, vermittelst der Grössen $A, A_1, A_2, \cdots$ allmählich die Grössen $A'_1, A'_2, A'_3, \cdots$ aus A' zu berechnen.

Hier jedoch wollen wir den Gang dieser Rechnung nicht weiter verfolgen, sondern an die Definition der Grössen A^i_n wieder anknüpfen. Es war

$$A'_n = \int_0^x A_n\, dx;$$

dies giebt, wenn für A_n jetzt der Ausdruck (9) gesetzt wird,

$$A'_n = \int_0^x (\psi(x)\sin x + \chi(x)\cos x)\, dx.$$

Aehnlich den Hilfsformeln (10) und (11) findet man

$$A'_n = (\Psi'(x) + X(x))\sin x + (X'(x) - \Psi(x))\cos x + \Psi(0) - X'(0), \tag{21}$$

wenn

$$\Psi(x) = \psi(x) - \psi''(x) + \psi''''(x) - \cdots$$
$$X(x) = \chi(x) - \chi''(x) + \chi''''(x) - \cdots$$

gesetzt wird. Wenn nun n gerade ist, so ist, wie gefunden worden, $\psi(x)$ und also auch $\Psi(x)$ eine gerade Funktion n^{ten}, $\chi(x)$ und daher auch $X(x)$ eine ungerade Funktion $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades; daher wird der Faktor von $\sin x$ zur Rechten in (21) in diesem Falle eine ungerade Funktion $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades, der Faktor von $\cos x$ eine gerade Funktion n^{ten} Grades sein. Ist im Gegentheil n ungerade, so findet sich in gleicher Weise der Faktor von $\sin x$ als eine ungerade Funktion n^{ten}, der von $\cos x$ als eine gerade Funktion $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades. Endlich ist $\Psi(0) - X'(0)$ eine gewisse Konstante, welche C heisse. Setzt man

$$X'(x) - \Psi(x) = \psi_1(x), \quad \Psi'(x) + X(x) = \chi_1(x),$$

so verhalten sich $\psi_1(x)$, $\chi_1(x)$ ganz entsprechend den mit $\psi(x)$, $\chi(x)$ bezeichneten beiden Funktionen, und man hat

$$A_n' = \psi_1(x)\cos x + \chi_1(x)\sin x + C.$$

Eine neue Integration liefert

$$A_n'' = \int_0^x (\psi_1(x)\cos x + \chi_1(x)\sin x)\,dx + Cx$$

$$= (X_1'(x) + \Psi_1(x))\sin x + (\Psi_1'(x) - X_1(x))\cos x + Cx + X_1(0) - \Psi_1'(0).$$

Nach der angemerkten Natur der Funktionen $\psi_1(x)$, $\chi_1(x)$ aber ergiebt sich zunächst $X_1(0) = 0$, $\Psi_1'(0) = 0$, und wenn man dann

$$X_1'(x) + \Psi_1(x) = \psi_2(x), \quad \Psi_1'(x) - X_1(x) = \chi_2(x)$$

setzt, so verhalten sich die Funktionen $\psi_2(x)$, $\chi_2(x)$ wieder ganz genau so, wie die Funktionen $\psi(x)$, $\chi(x)$ resp., und die vorige Gleichung wird:

$$A_n'' = \psi_2(x)\sin x + \chi_2(x)\cos x + Cx.$$

In gleicher Weise findet man nunmehr leicht:

$$A_n''' = \psi_3(x)\cos x + \chi_3(x)\sin x + \frac{C}{2}x^2 + C'$$

$$A_n'''' = \psi_4(x)\sin x + \chi_4(x)\cos x + \frac{C}{6}x^3 + C'x$$

u. s. f. Man kann mit andern Worten folgendes allgemeine Ergebniss aussprechen: Jenachdem i gerade oder ungerade ist, findet man

$$A_n^i = \psi_i(x) \sin x + \chi_i(x) \cos x + \varphi_i(x)$$

oder

$$A_n^i = \psi_i(x) \cos x + \chi_i(x) \sin x + \varphi_i(x),$$

wobei $\psi_i(x)$ eine gerade Funktion n^{ten} oder $(n-1)^{\text{ten}}$, $\chi_i(x)$ eine ungerade Funktion $(n-1)^{\text{ten}}$ oder n^{ten} Grades bedeutet, jenachdem n gerade oder ungerade ist, während $\varphi_i(x)$ eine ganze Funktion von x ist, deren Grad gleichzeitig mit $i-1$ gerade oder ungerade ist.

6. Betrachtet man nun irgend zwei aufeinanderfolgende Glieder der Reihe A_n, A_n', A_n'', A_n''', $\cdots$, z. B. grösster Einfachheit wegen die beiden ersten Glieder:

$$\psi(x) \sin x + \chi(x) \cos x = A_n$$
$$\chi_1(x) \sin x + \psi_1(x) \cos x = A_n' - C,$$

so lassen sich die so gebildeten Gleichungen nach den Grössen $\sin x$, $\cos x$ auflösen und ergeben im betrachteten Falle:

$$\sin x \cdot R(x^2) = x \cdot T(x^2) + A_n \cdot \psi_1(x) - A_n' \cdot \chi(x)$$
$$\cos x \cdot R(x^2) = \quad S(x^2) - A_n \cdot \chi_1(x) + A_n' \cdot \psi(x),$$

wenn $\psi(x)\psi_1(x) - \chi(x)\chi_1(x)$, was eine gerade Funktion von x vom Grade $2n$ ist, mit $R(x^2)$, die gerade Funktion $-C \cdot \psi(x)$ mit $S(x^2)$, die ungerade Funktion $C \cdot \chi(x)$ mit $x \cdot T(x^2)$ bezeichnet wird. Nach den für A_n, A_n' gegebenen Reihenausdrücken beginnen die nach steigenden Potenzen von x entwickelten, rechts noch ausser den ersten Gliedern stehenden Produkte offenbar erst mit x^{2n+1} bezw. x^{2n+2}. Denkt man sich also die Produkte $\sin x \cdot R(x^2)$, $\cos x \cdot R(x^2)$ gleichfalls nach den steigenden Potenzen von x entwickelt, und vernachlässigt alle Potenzen, welche die vom Grade $2n$ übersteigen, so müssen die Entwicklungen mit den ganzen Funktionen $x \cdot T(x^2)$, $S(x^2)$, deren Grade höchstens gleich n sind, bezw. übereinstimmen. Diesen Umstand wollen wir hinfort kurz in der Weise ausdrücken, dass wir sagen: $\sin x$, $\cos x$ seien bis auf Potenzen vom Grade $2n$ den rationalen Brüchen $\frac{x\,T(x^2)}{R(x^2)}$, $\frac{S(x^2)}{R(x^2)}$ bez. gleich, welche demnach als Näherungsbrüche mit demselben Nenner bezeichnet werden können.

Setzt man hierin, was wir uns einmal erlauben wollen wie Lambert, ohne die Berechtigung dazu näher zu erläutern, $\frac{x}{i}$ statt x, und benutzt die Formel

$$\cos\frac{x}{i} + i \cdot \sin\frac{x}{i} = e^x,$$

so entsteht aus den Gleichungen

$$\sin x = \frac{x\,T(x^2)}{R(x^2)} \cdots, \quad \cos x = \frac{S(x^2)}{R(x^2)} \cdots,$$

mit denen wir jenen Umstand ausdrücken, sogleich auch die folgende:

$$e^x = \frac{S(-x^2) + x \cdot T(-x^2)}{R(-x^2)} \cdots$$

oder kürzer

$$e^x = \frac{M(x)}{N(x)} \cdots$$

worin $M(x)$, $N(x)$ zwei ganze Funktionen von x, der Nenner insbesondere eine gerade Funktion von x vom Grade $2n$ ist; man findet also auch für die Exponentialfunktion e^x eine bis zu demselben Grade reichende Annäherung mittels einer rational gebrochenen Funktion.

7. Wenn wir von der besonderen Beschaffenheit der Funktionen $M(x)$, $N(x)$ absehen, können wir ganz im allgemeinen sagen: Die vorhergehenden Betrachtungen haben die Möglichkeit erwiesen, der Funktion e^x sich bis zu einem gewissen Grade durch einen rationalen Bruch anzunähern. Dass solche Annäherung sogar bis zu einem beliebigen Grade μ hin möglich ist, davon kann man sich leicht a priori überzeugen. Setzen wir nämlich die Gleichung an:

$$e^x = \frac{M(x)}{N(x)} + \cdots$$

mit Vernachlässigung von Potenzen vom Grade grösser als μ, d. h.

$$e^x \cdot N(x) - M(x) = \varepsilon_1 x^{\mu+1} + \varepsilon_2 x^{\mu+2} + \cdots, \tag{22}$$

und wählen die Grade der beiden Funktionen $M(x)$ und $N(x)$ gleich m, n resp. Wird für e^x seine Reihenentwicklung eingesetzt und die linke Seite der vorigen Gleichung nach steigenden Potenzen von x entwickelt gedacht, so muss man,

um der Gleichung zu genügen, die Coefficienten von $x^0, x^1, x^2, \cdots x^\mu$ gleich Null setzen, erhält also $\mu + 1$ offenbar homogene Gleichungen zwischen den Coefficienten der ganzen Funktionen $M(x)$ und $N(x)$, deren Anzahl gleich

$$(m + 1) + (n + 1) = m + n + 2$$

ist. Werden daher m, n so gewählt, dass ihre Summe $m + n = \mu$ ist, so dienen jene Bedingungsgleichungen genau zur Bestimmung der Verhältnisse der Coefficienten und, wenn etwa der Coefficient der höchsten Potenz in $N(x)$ angenommen, nämlich gleich 1 gewählt wird, zur Bestimmung der Coefficienten selbst, und die Möglichkeit der Annäherung ist dadurch erwiesen.

Aber man kann auch mit Hermite, ausgehend von einer elementaren Integralformel, für jeden gegebenen Grad μ Funktionen $\frac{M(x)}{N(x)}$ ohne Schwierigkeit finden, welche die Annäherung leisten.

Ist nämlich $F(z)$ eine Funktion von z, die wir für unsern Zweck sogleich als ganze Funktion vom Grade μ voraussetzen, und setzt man zur Abkürzung

$$\frac{F(z)}{x} + \frac{F'(z)}{x^2} + \cdots + \frac{F^{(\mu)}(z)}{x^{\mu+1}} = \mathfrak{F}(z), \tag{23}$$

so findet sich mittels partieller Integration die Formel:

$$\int e^{-zx} \cdot F(z)\, dz = -\, e^{-zx} \cdot \mathfrak{F}(z), \tag{24}$$

und folglich, wenn zwischen den Grenzen ζ, Z integrirt wird, die folgende:

$$\int_\zeta^Z e^{-zx} \cdot F(z)\, dz = e^{-\zeta x} \cdot \mathfrak{F}(\zeta) - e^{-Zx} \cdot \mathfrak{F}(Z). \tag{24a}$$

Werden nun ζ, Z als zwei verschiedene Wurzeln der Gleichung $F(z) = 0$, und zwar die erste als eine h-fache, die zweite als eine k-fache Wurzel vorausgesetzt, so verschwinden für $z = \zeta$ ausser der Funktion $F(z)$ auch ihre $h - 1$ ersten, für $z = Z$ ihre $k - 1$ ersten Ableitungen und es findet sich

$$\mathfrak{F}(\xi) = \frac{F^{(k)}(\xi)}{x^{k+1}} + \frac{F^{(k+1)}(\xi)}{x^{k+2}} + \cdots + \frac{F^{(\mu)}(\xi)}{x^{\mu+1}}$$

$$\mathfrak{F}(Z) = \frac{F^{(k)}(Z)}{x^{k+1}} + \frac{F^{(k+1)}(Z)}{x^{k+2}} + \cdots + \frac{F^{(\mu)}(Z)}{x^{\mu+1}},$$

d. h.

$$\mathfrak{F}(Z) = \frac{M(x)}{x^{\mu+1}}, \quad \mathfrak{F}(\xi) = \frac{N(x)}{x^{\mu+1}}, \tag{25}$$

wenn $M(x)$ eine ganze Funktion vom Grade $m = \mu - k$, $N(x)$ eine ganze Funktion vom Grade $n = \mu - h$ bedeutet. Hiernach nimmt die Gleichung (24a) die Gestalt an:

$$e^{-\xi x} \cdot N(x) - e^{-Zx} \cdot M(x) = x^{\mu+1} \cdot \int_{\xi}^{Z} e^{-sx} F(z)\, dz \tag{26}$$

und liefert, wenn insbesondere $\xi = 0$ angenommen wird, die folgende:

$$e^{Zx} \cdot N(x) - M(x) = x^{\mu+1} \cdot e^{Zx} \cdot \int_{0}^{Z} e^{-sx} F(z)\, dz. \tag{27}$$

Denkt man sich schliesslich hierin statt e^{Zx} und e^{-sx} zur Rechten der Gleichung ihre Reihenentwicklungen gesetzt und die ganze rechte Seite nach steigenden Potenzen von x entwickelt, so ist einleuchtend, dass die Entwicklung mit $x^{\mu+1}$ beginnt; demnach liefert vorstehende Gleichung eine, bis zum Grade μ reichende Annäherung an die Funktion e^{Zx} durch den Bruch $\frac{M(x)}{N(x)}$.

8. Z. B., wenn $F(z) = z^h(z-1)^k$ und $h + k = \mu$ gewählt wird, ergiebt sich aus (27) die besondere Formel:

$$e^x \cdot N(x) - M(x) = x^{\mu+1} \cdot e^x \cdot \int_{0}^{1} e^{-sx} z^h (z-1)^k\, dz,$$

oder noch specieller, wenn $h = k$ also $\mu = 2h$ ist,

$$e^x \cdot N(x) - M(x) = x^{2h+1} \cdot e^x \int_{0}^{1} e^{-sx} z^h (z-1)^h\, dz. \tag{28}$$

Die Funktionen $M(x)$ und $N(x)$ sind in diesem Falle leicht angebbar.

Aus $F(z) = z^h(z-1)^h$ folgt nämlich mittels des binomischen Satzes

$$F(z) = z^{2h} - \frac{h}{1}z^{2h-1} + \frac{h(h-1)}{1\cdot 2}z^{2h-2} - \cdots + (-1)^h \cdot z^h,$$

also durch i-malige Differenzirung,

$$\begin{aligned} F^{(i)}(z) = \quad & 2h(2h-1)\cdots(2h-i+1)z^{2h-i} \\ & - \frac{h}{1}\cdot(2h-1)\cdots(2h-i)z^{2h-i-1} \\ & + \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ & + \frac{h(h-1)}{1\cdot 2}\cdot(h+2)\cdots(h-i+3)\cdot(-1)^{h+2}z^{h-i+2} \\ & + \frac{h}{1}\cdot(h+1)h\cdots(h-i+2)\cdot(-1)^{h+1}z^{h-i+1} \\ & + h\cdot(h-1)\cdots(h-i+1)\cdot(-1)^h z^{h-i}. \end{aligned}$$

Hieraus findet sich $F^{(i)}(0) = 0$, solange $i < h$ ist; ferner

$$F^{(h)}(0) = (-1)^h \cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdots h$$

$$F^{(h+1)}(0) = (-1)^{h+1}\cdot\frac{h}{1}\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdots(h+1)$$

$$F^{(h+2)}(0) = (-1)^{h+2}\cdot\frac{h(h-1)}{1\cdot 2}\cdot 1\cdot 2\cdots(h+2)$$

u. s. f., allgemein für $r = 0, 1, 2, \cdots h$

$$F^{(h+r)}(0) = (-1)^{h+r}\cdot\frac{h(h-1)\cdots(h-r+1)}{1\cdot 2\cdots r}\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdots(h+r).$$

Nach den Ausdrücken für $\mathfrak{F}(\xi)$, wo jetzt $\xi = 0$ ist, ergiebt sich demnach

$$\begin{aligned} \frac{N(x)}{x^{2h+1}} = & \frac{(-1)^h\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdots h}{x^{h+1}} + (-1)^{h+1}\cdot\frac{h}{1}\cdot\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots(h+1)}{x^{h+2}} \\ & + (-1)^{h+2}\cdot\frac{h(h-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots(h+2)}{x^{h+3}} + \cdots \\ & + (-1)^{2h}\cdot\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots 2h}{x^{2h+1}}, \end{aligned}$$

und folglich

$$\begin{aligned} N(x) = & (-1)^h\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdots h\cdot\Big[x^h - \frac{h}{1}\cdot(h+1)x^{h-1} + \\ & + \frac{h(h-1)}{1\cdot 2}(h+1)(h+2)x^{h-2} - \cdots + (-1)^h(h+1)(h+2)\cdots 2h\Big]. \end{aligned} \tag{29}$$

Andererseits ist $F(-z) = z^h(z+1)^h$ und, wenn $1+z$ statt z gesetzt wird, $F(1+z) = z^h(z+1)^h$, also

$$F(1+z) = F(-z),$$

woraus durch i-malige Differenzirung

$$F^{(i)}(1+z) = (-1)^i \cdot F^{(i)}(-z)$$

und für $z = 0$

$$F^{(i)}(1) = (-1)^i \cdot F^{(i)}(0)$$

gefunden wird. Nach den Ausdrücken für $\mathfrak{F}(Z)$, wo jetzt $Z = 1$ ist, wird demnach gewonnen:

$$\frac{M(x)}{x^{2h+1}} = \frac{1.2.3\ldots h}{x^{h+1}} + \frac{h}{1}\cdot\frac{1.2.3\ldots(h+1)}{x^{h+2}}$$
$$+\frac{h(h-1)}{1.2}\cdot\frac{1.2.3\ldots(h+2)}{x^{h+3}} + \cdots + \frac{1.2.3\ldots 2h}{x^{2h+1}},$$

und folglich

$$M(x) = 1\cdot 2\cdot 3\cdots h\cdot\Big[x^h + \frac{h}{1}\cdot(h+1)x^{h-1} +$$
$$+\frac{h(h-1)}{1.2}(h+1)(h+2)x^{h-2} + \cdots + (h+1)(h+2)\cdots 2h\Big]. \tag{30}$$

Die so für $M(x)$ und $N(x)$ erhaltenen Ausdrücke (29) und (30) lehren, dass nicht nur die Coefficienten dieser beiden ganzen Funktionen, sondern auch noch diejenigen der Funktionen

$$\mathrm{M}(x) = \frac{M(x)}{1.2.3\ldots h}, \quad \mathrm{N}(x) = \frac{N(x)}{1.2.3\ldots h}$$

ganze Zahlen sind; und man findet zunächst aus (28) die Gleichung

$$e^x\cdot\mathrm{N}(x) - \mathrm{M}(x) = \frac{x^{2h+1}}{1.2.3\ldots h}\cdot\int_0^1 e^{(1-z)x}\cdot z^h\cdot(z-1)^h\cdot dz. \tag{31}$$

Aus dieser aber lässt sich ohne Mühe der nach Lambert und Legendre aus anderer Quelle von uns bereits abgeleitete Satz, dass e^x irrational sei, sobald der Exponent x eine rationale Zahl ist, wiedergewinnen. Denn, wäre im Gegentheil, wenn x rational, $x = \frac{r}{s}$ ist, e^x eine rationale Zahl $\frac{a}{b}$, so nähme die vorige Gleichung, wie gross h auch gedacht wird, die Form an:

$$a\cdot\mathrm{N}(x) - b\cdot\mathrm{M}(x) = bx\cdot\frac{x^{2h}}{1.2\ldots h}\cdot\int_0^1 e^{(1-z)x}\cdot z^h(z-1)^h\,dz$$

oder auch

$$a \cdot N - b \cdot M = \frac{br}{s} \cdot \frac{\left(\frac{r^2}{s}\right)^h}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots h} \cdot \text{Integral},$$

wo M, N ganze Zahlen bedeuten. Links steht demnach jetzt eine ganze Zahl. Eine solche Gleichung ist aber nicht für jedes noch so grosse h möglich; denn weil der Faktor

$$\frac{\left(\frac{r^2}{s}\right)^h}{1 \cdot 2 \ldots h}$$

und damit auch die ganze rechte Seite mit wachsendem h gegen Null convergirt, wird der Ausdruck zur Rechten für hinreichend grosse Werthe von h, ohne Null zu werden, unter die Einheit herabsinken, dann also keiner ganzen Zahl mehr gleich sein können.

Siebente Vorlesung.

(Fortsetzung.)

1. Die zuletzt angestellten Betrachtungen lassen sich erheblich verallgemeinern. Sei nämlich jetzt

$$F(z) = (z - z_0)^{m_0} \cdot (z - z_1)^{m_1} \cdots (z - z_n)^{m_n} \tag{1}$$

und setzen wir noch

$$f(z) = (z - z_0)(z - z_1) \cdots (z - z_n) \tag{2}$$

und

$$\mu = m_0 + m_1 + \cdots + m_n. \tag{3}$$

Aus dem allgemeinen Ausdrucke für $\mathfrak{F}(z)$ folgt dann sogleich

$$\mathfrak{F}(z_0) = \frac{N(x)}{x^{\mu+1}}, \quad \mathfrak{F}(z_1) = \frac{M_1(x)}{x^{\mu+1}}, \quad \cdots \quad \mathfrak{F}(z_n) = \frac{M_n(x)}{x^{\mu+1}},$$

wo unter $N(x)$ eine ganze Funktion von x vom Grade $\mu - m_0$, unter $M_1(x)$ eine solche vom Grade $\mu - m_1$, $\cdots$ unter $M_n(x)$ eine solche vom Grade $\mu - m_n$ zu verstehen ist. Aus der Formel (26) der vor. Vorlesung werden wir also für jeden Werth $i = 1, 2, 3, \cdots n$ die Gleichung erhalten:

$$(4) \quad e^{-z_0 x} \cdot N(x) - e^{-z_i x} \cdot M_i(x) = x^{\mu+1} \cdot \int_{z_0}^{z_i} e^{-zx} F(z)\, dz,$$

und diese giebt, wenn insbesondere $z_0 = 0$ angenommen wird, die folgenden Gleichungen:

$$e^{z_1 x} \cdot N(x) - M_1(x) = x^{\mu+1} \cdot \int_0^{z_1} e^{(z_1 - z)x} F(z)\, dz$$

$$e^{z_2 x} \cdot N(x) - M_2(x) = x^{\mu+1} \cdot \int_0^{z_2} e^{(z_2 - z)x} F(z)\, dz$$

. . . . . .

$$e^{z_n x} \cdot N(x) - M_n(x) = x^{\mu+1} \cdot \int_0^{z_n} e^{(z_n - z)x} F(z)\, dz.$$

Da in den sämmtlichen rechten Seiten derselben, wenn sie nach steigenden Potenzen von x entwickelt gedacht werden, die niedrigste Potenz offenbar $x^{\mu+1}$ sein muss, so geben diese Gleichungen eine gleichzeitige Annäherung desselben Grades an die n Exponentialgrössen $e^{z_1 x}$, $e^{z_2 x}$, $\cdots$ $e^{z_n x}$ vermittelst der n Näherungsbrüche

$$(5) \qquad \frac{M_1(x)}{N(x)}, \quad \frac{M_2(x)}{N(x)}, \quad \cdots \quad \frac{M_n(x)}{N(x)}$$

mit gleichem Nenner.

2. Mit der besonderen Wahl der Funktion $F(z)$, nämlich der Exponenten m_0, m_1, $\cdots$ m_n werden natürlich diese Näherungsbrüche sich ändern. Wir wollen z. B., indem wir alle Exponenten von gleichem Werthe m nehmen,

$$F(z) = f(z)^m$$

wählen; dieser Wahl entspricht dann also ein ganz bestimmtes System von Näherungsbrüchen (5). Jedoch wird dasselbe mit anderer Wahl des Exponenten m jedesmal ein anderes werden, ein anderes also, wenn für m allmählich erst $m + 1$, dann $m + 2$, $\cdots$ gesetzt wird. Es ist nun höchst beachtenswerth, dass zwischen den Zählern resp. Nennern der Näherungsbrüche dieser aufeinanderfolgenden Sy-

steme ein ähnlicher Zusammenhang besteht, wie dies bei den gewöhnlichen Kettenbrüchen der Fall ist: die Zähler nämlich und die Nenner der späteren Systeme lassen sich aus den entsprechenden Zählern resp. Nennern der früheren in gleichmässiger Weise berechnen. Dieser Umstand beruht aber darauf, dass — wenn wir hinfort mit Rücksicht auf unser eigentliches Vorhaben der Unbestimmten x den Werth 1 geben — in der Reihe der Integrale

$$\int_{z_0}^{z_i} e^{-z} \cdot f(z)^m \, dz, \quad \int_{z_0}^{z_i} e^{-z} \cdot f(z)^{m+1} \, dz, \quad \int_{z_0}^{z_i} e^{-z} \cdot f(z)^{m+2} \, dz$$

. . . . . .

die späteren in bestimmter Weise aus den früheren berechnet werden können. Die eigenthümliche Art der Berechnung, wie sie Hermite nachgewiesen hat, ist folgende:

Zunächst ergiebt sich durch partielle Integration die Richtigkeit der Formel

$$\int_{z_0}^{z_i} e^{-z} \cdot f(z)^m \, dz = m \cdot \int_{z_0}^{z_i} e^{-z} \cdot f(z)^{m-1} \cdot f'(z) \, dz,$$

welche, mit Hilfe der bekannten Differenzialbeziehung

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{z - z_0} + \frac{1}{z - z_1} + \cdots + \frac{1}{z - z_n}$$

die Gestalt annimmt:

$$\int_{z_0}^{z_i} e^{-z} \cdot f(z)^m \, dz$$

$$(6) \qquad = m \cdot \int_{z_0}^{z_i} e^{-z} \cdot \frac{f(z)^m}{z - z_0} \, dz + \cdots + m \cdot \int_{z_0}^{z_i} e^{-z} \cdot \frac{f(z)^m}{z - z_n} \, dz.$$

Wir wollen, einer kurzen Bezeichnung halber, die einzelnen Integrale zur Rechten die Bestandtheile des auf der Linken stehenden Integrales nennen. Offenbar wird man nun aus diesem Integrale das folgende Integral

$$\int_{z_0}^{z_i} e^{-z} \cdot f(z)^{m+1} \, dz$$

berechnen können, wenn es möglich ist, seine Bestandtheile aus den Bestandtheilen des Integrales

$$\int_{z_0}^{z_i} e^{-z} \cdot f(z)^m dz$$

zu finden. Der Kern der ganzen Hermite'schen Betrachtung besteht nun in dem Nachweise, dass dieses der Fall ist, dass nämlich für jeden Werth ζ aus der Reihe $z_0, z_1, z_2, \ldots z_n$ eine Gleichung besteht von der Form:

$$\int_{z_0}^{z_i} e^{-z} \cdot \frac{f(z)^{m+1}}{z-\zeta} dz$$

(7)

$$= k_0 \cdot \int_{z_0}^{z_i} e^{-z} \cdot \frac{f(z)^m}{z-z_0} dz + \cdots + k_n \cdot \int_{z_0}^{z_i} e^{-z} \cdot \frac{f(z)^m}{z-z_n} dz.$$

3. Um diesen Nachweis zu führen, bemerken wir zuvörderst, dass die Summe

$$\frac{k_0}{z-z_0} + \frac{k_1}{z-z_1} + \cdots + \frac{k_n}{z-z_n} = \frac{\psi(z)}{f(z)} \tag{8}$$

gesetzt werden kann, wenn unter $\psi(z)$ eine ganze Funktion vom Grade n verstanden wird; aber auch umgekehrt kann bei solcher Bedeutung von $\psi(z)$ der Bruch $\frac{\psi(z)}{f(z)}$ bekanntlich in Partialbrüche zerlegt und eine Gleichung von der Form (8) gebildet werden, in welcher dann die Zähler der Partialbrüche durch die Formeln

$$k_0 = \frac{\psi(z_0)}{f'(z_0)}, \quad k_1 = \frac{\psi(z_1)}{f'(z_1)}, \quad \cdots \quad k_n = \frac{\psi(z_n)}{f'(z_n)} \tag{9}$$

gegeben sind. Hiernach ist die Gleichung (7) vollständig gleichbedeutend mit der folgenden:

$$\int_{z_0}^{z_i} e^{-z} \cdot \frac{f(z)^{m+1}}{z-\zeta} dz = \int_{z_0}^{z_i} e^{-z} \cdot f(z)^m \cdot \frac{\psi(z)}{f(z)} dz, \tag{10}$$

wenn $\psi(z)$ als ganze Funktion vom n^{ten} Grade gedacht wird. Um aber jetzt zu zeigen, dass diese Gleichung für jedes $i = 1, 2, 3, \ldots n$ besteht, wenn diese Funktion $\psi(z)$ geeignet

gewählt wird, genügt es offenbar nachzuweisen, dass bei unbestimmter Integration die Beziehung

$$\int e^{-z} \cdot \frac{f(z)^{m+1}}{z-\zeta}\, dz = \int e^{-z} \cdot f(z)^m \frac{\psi(z)}{f(z)}\, dz - \Psi(z)$$

erfüllbar ist, indem man die Funktion $\Psi(z)$ so bestimmt, dass sie an den Grenzen der bestimmten Integrationen, d. h. für alle Werthe $z_0, z_1, z_2, \ldots z_n$ verschwindet; denn dann kommt man beim Uebergange zur Integration zwischen den Grenzen z_0, z_i auf die Gleichung (10) zurück. Jene Beziehung aber ist wieder mit der nachstehenden, welche durch Differenzirung daraus hervorgeht, völlig gleichbedeutend

$$(11) \qquad e^{-z} \cdot \frac{f(z)^{m+1}}{z-\zeta} = e^{-z} \cdot f(z)^m \cdot \frac{\psi(z)}{f(z)} - \Psi'(z);$$

und letztere lehrt, dass $e^z \cdot \Psi'(z)$ eine ganze, durch $f(z)^{m-1}$ theilbare Funktion von z sein müsste. Diese Bedingung und zugleich auch die andere, dass $\Psi(z)$ für alle Werthe $z_0, z_1, z_2, \ldots z_n$ verschwinde, wird aber erfüllt, wenn wir ansetzen:

$$(12) \qquad \Psi(z) = e^{-z} \cdot f(z)^m \cdot \varphi(z),$$

und unter $\varphi(z)$ eine ganze Funktion verstehen. Die Gleichung (11) nimmt dann leicht die Form an:

$$(13) \quad f(z) \cdot \frac{f(z)}{z-\zeta} = \psi(z) + [f(z) - mf'(z)]\,\varphi(z) - f(z)\,\varphi'(z),$$

in welcher wir versuchen wollen, ihr durch geeignete Wahl von $\varphi(z)$ und $\psi(z)$ zu genügen. Dass dies überhaupt und in völlig bestimmter Weise möglich ist, davon überzeugt man sich durch die Ueberlegung, dass auf der linken Seite eine ganze Funktion vom Grade $2n+1$ steht, rechts aber, wenn der Grad von $\varphi(z)$ gleich n gewählt wird, ebenfalls eine Funktion des $(2n+1)^{\text{ten}}$ Grades, und dass die Anzahl der Coefficienten von $\varphi(z)$ und $\psi(z)$ zusammen genommen genau $2n+2$ beträgt, sodass dieselben den $2n+2$ durch Identificirung beider Seiten entstehenden Bedingungsgleichungen zu genügen im stande und dadurch bestimmt sind. Zur wirklichen Berechnung von $\varphi(z)$ und $\psi(z)$ schreibe man die vorige Gleichung in der neuen Form:

$$(14) \qquad \frac{f(z)}{z-\zeta} = \frac{\psi(z)}{f(z)} + \left(1 - m \cdot \frac{f'(z)}{f(z)}\right)\varphi(z) - \varphi'(z).$$

Hier steht links eine ganze Funktion, rechts aber zunächst die echt gebrochene Funktion $\frac{\psi(z)}{f(z)}$; demnach ist offenbar die Funktion $\varphi(z)$ so zu wählen, dass die in dem Ausdrucke

$$\left(1 - m\frac{f'(z)}{f(z)}\right)\varphi(z) - \varphi'(z)$$

enthaltene ganze Funktion gleich $\frac{f(z)}{z-\zeta}$ wird. Nun ist

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{z-z_0} + \frac{1}{z-z_1} + \frac{1}{z-z_2} + \cdots + \frac{1}{z-z_n}$$

oder, wenn allgemein

$$s_i = m(z_0^i + z_1^i + z_2^i + \cdots + z_n^i) \tag{15}$$

gesetzt wird,

$$m\cdot\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{s_0}{z} + \frac{s_1}{z^2} + \frac{s_2}{z^3} + \cdots;$$

setzt man daher noch

$$\varphi(z) = \alpha_0 z^n + \alpha_1 z^{n-1} + \alpha_2 z^{n-2} + \cdots + \alpha_n, \tag{16}$$

also

$$\varphi'(z) = n\alpha_0 z^{n-1} + (n-1)\alpha_1 z^{n-2} + (n-2)\alpha_2 z^{n-3} + \cdots,$$

so muss schliesslich derjenige Bestandtheil des nach fallenden Potenzen von z entwickelten Ausdruckes

$$\left(1 - \frac{s_0}{z} - \frac{s_1}{z^2} - \frac{s_2}{z^3} - \cdots\right)\left(\alpha_0 z^n + \alpha_1 z^{n-1} + \alpha_2 z^{n-2} + \cdots\right)$$
$$- n\alpha_0 z^{n-1} - (n-1)\alpha_1 z^{n-2} - (n-2)\alpha_2 z^{n-3} - \cdots,$$

welcher die ganzen Potenzen von z enthält, gleich $\frac{f(z)}{z-\zeta}$ sein.

Da man aber, wenn

$$f(z) = z^{n+1} + p_1 z^n + p_2 z^{n-1} + \cdots + p_{n+1} \tag{17}$$

und

$$\zeta_i = \zeta^i + p_1\zeta^{i-1} + p_2\zeta^{i-2} + \cdots + p_i \tag{18}$$

gesetzt wird,

$$\frac{f(z)}{z-\zeta} = z^n + \zeta_1 z^{n-1} + \zeta_2 z^{n-2} + \cdots + \zeta_n \tag{18a}$$

findet, so ergeben sich durch Vergleichung der entsprechenden Potenzen von z folgende Gleichungen:

$$(19)\qquad \begin{cases} \alpha_0 = 1 \\ \alpha_1 - (s_0 + n)\alpha_0 = \xi_1 \\ \alpha_2 - (s_0 + n - 1)\alpha_1 - s_1\alpha_0 = \xi_2 \\ \alpha_3 - (s_0 + n - 2)\alpha_2 - s_1\alpha_1 - s_2\alpha_0 = \xi_3 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

zur Bestimmung der Grössen α_i d. h. zur Bestimmung der Funktion $\varphi(z)$; und zwar findet man

$$(20)\qquad \begin{cases} \alpha_0 = 1 \\ \alpha_1 = \xi_1 + s_0 + n \\ \alpha_2 = \xi_2 + (s_0 + n - 1)\xi_1 + (s_0 + n)(s_0 + n - 1) + s_1 \\ \alpha_3 = \xi_3 + (s_0 + n - 2)\xi_2 + \big((s_0 + n - 1)(s_0 + n - 2) + s_1\big)\xi_1 \\ \qquad + (s_0 + n)(s_0 + n - 1)(s_0 + n - 2) \\ \qquad + (2s_0 + 2n - 2)s_1 + s_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Mit Beachtung der Definition der Zeichen p_i, ξ_i, wie sie aus (17) und (18) hervorgeht, findet man aus den vorstehenden Gleichungen allgemein α_i als eine ganze Funktion von ξ vom i^{ten} Grade, von deren Coefficienten der der höchsten Potenz gleich 1 ist, während die übrigen sich durch die ersten drei Rechnungsoperationen aus den Grössen p_i, s_i und ganzen Zahlen zusammensetzen, also ganze und ganzzahlige symmetrische Funktionen der Wurzeln z_0, z_1, z_2, $\cdots$ z_n der Gleichung $f(z) = 0$ sind. Demnach werden sie — nach den einfachsten Fundamentalsätzen aus der Theorie der Gleichungen — selbst ganze Zahlen sein, wenn die Coefficienten dieser Gleichung, insbesondere also, wenn die Wurzeln derselben ganze Zahlen sind. Wir wollen, um die Zusammensetzung der Grössen α_i anzudeuten, $\alpha_i = \varphi_i(\xi)$ und demnach

$$(21)\qquad \varphi(z) = z^n + \varphi_1(\xi)\cdot z^{n-1} + \cdots + \varphi_n(\xi)$$

schreiben; desgleichen wollen wir, um die Abhängigkeit der Funktion $\varphi(z)$ von ξ zu bezeichnen, statt $\varphi(z)$ uns lieber des Zeichens $\varphi(z, \xi)$ bedienen.

Ist durch diese Betrachtung die Funktion $\varphi(z)$ ermittelt, so findet sich jetzt sogleich aus (13)

$$\frac{\psi(z_0)}{f'(z_0)} = m \cdot \varphi(z_0, \zeta), \quad \cdots; \quad \frac{\psi(z_n)}{f'(z_n)} = m \cdot \varphi(z_n, \zeta)$$

und daher nach den Formeln (8) und (9)

$$(22) \qquad \frac{\psi(z)}{f(z_0)} = \frac{m\varphi(z_0, \zeta)}{z - z_0} + \frac{m\varphi(z_1, \zeta)}{z - z_1} + \cdots + \frac{m\varphi(z_n, \zeta)}{z - z_n}.$$

Wir hatten voraufgeschickt, dass es wirklich zwei ganz bestimmte Funktionen $\varphi(z)$, $\psi(z)$ geben muss, welche die Gleichung (13) erfüllen; wir haben diese nunmehr in den Formeln (21), (22) ermittelt. Die hieraus entspringenden Funktionen $\psi(z)$, $\Psi(z)$ erfüllen demnach auch die Gleichung (11), daher $\psi(z)$ auch die Gleichung (10), sodass sich sogleich folgendes Gesammtergebniss herausstellt:

$$(23) \qquad \int_{z_0}^{z_i} e^{-z} \cdot \frac{f(z)^{m+1}}{z - \zeta}\, dz$$

$$= m \cdot \varphi(z_0, \zeta) \cdot \int_{z_0}^{z_i} e^{-z} \cdot \frac{f(z)^m}{z - z_0}\, dz + \cdots + m \cdot \varphi(z_n, \zeta) \cdot \int_{z_0}^{z_i} e^{-z} \cdot \frac{f(z)^m}{z - z_n}\, dz,$$

welches die Gleichung (7) ist, deren Bestand wir behauptet hatten.

4. Die Wurzel z_i ist eine beliebige unter den Grössen $z_1, z_2, \cdots z_n$, während dagegen ζ eine der Grössen $z_0, z_1, z_2, \cdots z_n$ bedeutet. Hält man zunächst z_i fest, lässt dagegen ζ seine Werthe durchlaufen, so entstehen aus der einen Gleichung (23) $n + 1$ Gleichungen. Um diese möglichst einfach zu schreiben, führen wir folgende Bezeichnungen ein:

$$(24) \qquad \begin{cases} \varepsilon_m = \dfrac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots m} \displaystyle\int_{z_0}^{z_i} e^{-z} \cdot f(z)^m\, dz \\ \varepsilon_m^h = \dfrac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (m-1)} \displaystyle\int_{z_0}^{z_i} e^{-z} \cdot \frac{f(z)^m}{z - z_h}\, dz. \end{cases}$$

Aus (6) folgt dann vor allem die Beziehung:

$$(25) \qquad \varepsilon_m = \varepsilon_m^0 + \varepsilon_m^1 + \varepsilon_m^2 + \cdots + \varepsilon_m^n,$$

und wenn in den genannten $n+1$ Gleichungen noch m in $m-1$ verwandelt wird — wobei wir die Bezeichnung der Coefficienten $\varphi(z_0, z_0)$ u. s. w. beibehalten, aber beachten müssen, dass sie natürlich bei der Verwandlung von m in $m-1$ zwar andere Werthe erhalten wie vorher, ohne jedoch ihren oben näher bezeichneten Charakter zu verlieren — so nehmen die $n+1$ Gleichungen folgende Gestalt an:

$$(26)\quad \begin{cases} \varepsilon_m^0 = \varphi(z_0,z_0)\varepsilon_{m-1}^0 + \varphi(z_1,z_0)\varepsilon_{m-1}^1 + \cdots + \varphi(z_n,z_0)\varepsilon_{m-1}^n \\ \varepsilon_m^1 = \varphi(z_0,z_1)\varepsilon_{m-1}^0 + \varphi(z_1,z_1)\varepsilon_{m-1}^1 + \cdots + \varphi(z_n,z_1)\varepsilon_{m-1}^n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varepsilon_m^n = \varphi(z_0,z_n)\varepsilon_{m-1}^0 + \varphi(z_1,z_n)\varepsilon_{m-1}^1 + \cdots + \varphi(z_n,z_n)\varepsilon_{m-1}^n . \end{cases}$$

Indem nun hierin zunächst $m=2$, dann $m=3$ gewählt wird u. s. w., gewinnt man eine Reihe von Systemen linearer Gleichungen, welche offenbar gestatten, zuletzt die Grössen $\varepsilon_m^0, \varepsilon_m^1, \cdots \varepsilon_m^n$ linear auszudrücken durch die Grössen $\varepsilon_1^0, \varepsilon_1^1, \cdots \varepsilon_1^n$, sodass man setzen darf:

$$(27)\quad \begin{cases} \varepsilon_m^0 = A_0\varepsilon_1^0 + A_1\varepsilon_1^1 + \cdots + A_n\varepsilon_1^n \\ \varepsilon_m^1 = B_0\varepsilon_1^0 + B_1\varepsilon_1^1 + \cdots + B_n\varepsilon_1^n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varepsilon_m^n = L_0\varepsilon_1^0 + L_1\varepsilon_1^1 + \cdots + L_n\varepsilon_1^n , \end{cases}$$

Gleichungen, über deren Determinante wir eine wichtige Bemerkung zu machen haben.

In der Determinante der Gleichungen (26), nämlich der Determinante

$$\begin{vmatrix} \varphi(z_0,z_0), & \varphi(z_1,z_0), & \cdots & \varphi(z_n,z_0) \\ \varphi(z_0,z_1), & \varphi(z_1,z_1), & \cdots & \varphi(z_n,z_1) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & & & \\ \varphi(z_0,z_n), & \varphi(z_1,z_n), & \cdots & \varphi(z_n,z_n) \end{vmatrix}$$

hat das allgemeine Glied die Gestalt

$$\varphi(z_i,z_k) = z_i^n + z_i^{n-1}\cdot\varphi_1(z_k) + \cdots + 1\cdot\varphi_n(z_k);$$

infolge dessen ist sie nach als bekannt vorauszusetzenden Sätzen der Determinantentheorie das Produkt nachstehender zwei Determinanten:

$$\Delta = \begin{vmatrix} z_0^n, & z_1^n, & \ldots & z_n^n \\ z_0^{n-1}, & z_1^{n-1}, & \ldots & z_n^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ z_0, & z_1, & \ldots & z_n \\ 1, & 1, & \ldots & 1 \end{vmatrix},$$

welche bekanntlich das Produkt der Wurzeldifferenzen $z_i - z_k$ vorstellt, und

$$Z = \begin{vmatrix} 1, & 1, & \ldots & 1 \\ \varphi_1(z_0), & \varphi_1(z_1), & \ldots & \varphi_1(z_n) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi_i(z_0), & \varphi_i(z_1), & \ldots & \varphi_i(z_n) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi_n(z_0), & \varphi_n(z_1), & \ldots & \varphi_n(z_n) \end{vmatrix}.$$

In der letztern aber ist — nach den über $\alpha_i = \varphi_i(\xi)$ gemachten Bemerkungen —

$$\varphi_i(z_0) = z_0^i + c_1 z_0^{i-1} + \cdots + c_{i-1} z_0 + c_i$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\varphi_i(z_n) = z_n^i + c_1 z_n^{i-1} + \cdots + c_{i-1} z_n + c_i;$$

ihre $(i+1)^{\text{te}}$ Horizontalreihe entsteht also aus der (von unten gerechnet) $(i+1)^{\text{ten}}$ Horizontalreihe der Determinante Δ, indem dazu die unteren Reihen derselben mit $c_1, \ldots c_{i-1}, c_i$ bezüglich multiplicirt hinzugefügt werden, ein Verfahren, welches bekanntlich den Werth der Determinante Δ nicht ändert. Und somit ergiebt sich $Z = \Delta$, d. h. die Determinante der Gleichungen (26) hat den Werth Δ^2, welchen Werth man für m auch vorausgesetzt hat. Da nun die Determinante der Gleichungen (27), den Gesetzen der Zusammensetzung linearer Gleichungssysteme gemäss, das Produkt aus den Determinanten der $m-1$ aufeinanderfolgenden Systeme linearer Gleichungen ist, aus deren Zusammensetzung jene entstanden, so findet sich sogleich für die Determinante der Gleichungen (27) der Werth $\Delta^{2(m-1)}$. Die Wurzeln $z_0, z_1, z_2, \ldots z_n$ der Gleichung $f(z) = 0$ werden aber als von einander verschieden vorausgesetzt; daher ist Δ und somit auch jene Determinante verschieden von Null.

5. Um zur Einsetzung in die Gleichungen (27) die Werthe der Grössen ε_1^h zu ermitteln, gehen wir aus von der Betrachtung des Integrales

$$\int e^{-z} \cdot \frac{f(z)}{z-\zeta} \cdot dz,$$

in welchem ζ irgend eine der Wurzeln $z_0, z_1, z_2, \ldots z_n$ der Gleichung $f(z) = 0$ bedeuten soll. Man findet es zunächst nach (18) und (18a) gleich

$$\int e^{-z} \cdot [z^n + (\zeta + p_1) z^{n-1} + (\zeta^2 + p_1 \zeta + p_2) z^{n-2} + \cdots + \zeta^n + p_1 \zeta^{n-1} + p_2 \zeta^{n-2} + \cdots + p_n] dz,$$

und da nach der Hermite'schen Grundformel — (24) vor. Vorlesung — sogleich gefunden wird:

$$\int e^{-z} \cdot z^m dz = -e^{-z} \left(z^m + m z^{m-1} + m(m-1) z^{m-2} + \cdots\right),$$

so kann man setzen:

$$\int e^{-z} \cdot \frac{f(z)}{z-\zeta} dz = -e^{-z} \cdot \Phi(z, \zeta), \tag{28}$$

wobei die Funktion $\Phi(z, \zeta)$ statt der Summe

$$\begin{aligned} & z^n + n z^{n-1} + n(n-1) z^{n-2} + \cdots \\ & + (\zeta + p_1) \left(z^{n-1} + (n-1) z^{n-2} + \cdots\right) \\ & + (\zeta^2 + p_1 \zeta + p_2) (z^{n-2} + \cdots) \\ & + \cdots + \zeta^n + p_1 \zeta^{n-1} + \cdots + p_n \end{aligned}$$

steht, also gleich

$$\begin{aligned} & z^n + (\zeta + p_1 + n) z^{n-1} \\ & + \left(\zeta^2 + (p_1 + n - 1)\zeta + p_2 + (n-1) p_1 + n(n-1)\right) z^{n-2} \\ & + \cdots \end{aligned}$$

ist. Wenn man folglich schreibt

$$\Phi(z, \zeta) = z^n + \varphi^1(\zeta) \cdot z^{n-1} + \varphi^2(\zeta) \cdot z^{n-2} + \cdots + \varphi^n(\zeta),$$

so wird $\varphi^i(\zeta)$, wie früher die Funktion $\varphi_i(\zeta)$, eine ganze Funktion von ζ vom i^{ten} Grade, von deren Coefficienten der höchste gleich 1, die übrigen ganze und ganzzahlige symmetrische Funktionen der Wurzeln $z_0, z_1, z_2, \ldots z_n$, also

ganze Zahlen sind, so oft die letzteren es sind. In diesem Falle werden demnach auch die sämmtlichen Werthe $\Phi(z_i, z_k)$ ganze Zahlen sein, und aus der Zusammensetzung von $\Phi(z, \zeta)$, welche derjenigen von $\varphi(z, \zeta)$ gänzlich analog ist, schliesst man, gerade wie es für die Determinante der Grössen $\varphi(z_i, z_k)$ geschehen ist, dass auch die Determinante der Grössen $\Phi(z_i, z_k)$ gleich Δ^2 also von Null verschieden ist.

Nunmehr ergiebt sich mit Rücksicht auf die Definitionsgleichungen (24) nach der Formel (28) der Werth

$$\varepsilon_1^h = e^{-z_0} \cdot \Phi(z_0, z_h) - e^{-z_i} \cdot \Phi(z_i, z_h). \tag{29}$$

Wenn wir also, um die Abhängigkeit der Grössen ε_m^h auch von z_i anzudeuten, jetzt lieber $\varepsilon_{i,m}^h$ statt ε_m^h setzen, so werden die Gleichungen (27) folgende Gestalt annehmen:

$$\begin{cases} \varepsilon_{i,m}^0 = e^{-z_0} \cdot \alpha_0 - e^{-z_i} \cdot \alpha_i \\ \varepsilon_{i,m}^1 = e^{-z_0} \cdot \beta_0 - e^{-z_i} \cdot \beta_i \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varepsilon_{i,m}^n = e^{-z_0} \cdot \lambda_0 - e^{-z_i} \cdot \lambda_i, \end{cases} \tag{30}$$

in welcher gesetzt ist

$$\begin{cases} \alpha_i = A_0 \cdot \Phi(z_i, z_0) + A_1 \cdot \Phi(z_i, z_1) + \cdots + A_n \Phi(z_i, z_n) \\ \beta_i = B_0 \cdot \Phi(z_i, z_0) + B_1 \cdot \Phi(z_i, z_1) + \cdots + B_n \Phi(z_i, z_n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \lambda_i = L_0 \cdot \Phi(z_i, z_0) + L_1 \cdot \Phi(z_i, z_1) + \cdots + L_n \Phi(z_i, z_n). \end{cases} \tag{31}$$

So oft die Wurzeln $z_0, z_1, z_2, \ldots z_n$ als ganze Zahlen vorausgesetzt werden, werden auch diese Grössen $\alpha_i, \beta_i, \ldots \lambda_i$ sämmtlich ganzzahlig sein; denn dann werden nicht nur, wie bemerkt, die sämmtlichen Grössen $\Phi(z_i, z_k)$, sondern aus gleichen Gründen auch die sämmtlichen Grössen $\varphi(z_i, z_k)$ und demnach auch die aus Ausdrücken dieser Art nur durch Additionen, Subtraktionen und Multiplikationen zusammengesetzten Coefficienten $A, B, \ldots L$ ganze Zahlen sein.

6. So haben wir die Grundlage gewonnen, auf welcher nun der Hermite'sche Satz, dass die Zahl *e* transcendent sei, sehr einfach erwiesen werden kann. Denn, wäre im Gegentheil *e* eine algebraische Zahl, d. h. Wurzel einer algebraischen

Gleichung mit rationalen Coefficienten, so müsste eine Beziehung stattfinden von folgender Form:

$$e^{z_0} \cdot N_0 + e^{z_1} \cdot N_1 + \cdots + e^{z_n} \cdot N_n = 0, \tag{32}$$

in welcher die N_i ganze, von Null verschiedene Zahlen, die Exponenten $z_0, z_1, z_2, \ldots z_n$ aber positive ganze Zahlen (Null einschliesslich) wären. Nun ergiebt sich aber, indem diese ganzen Zahlen jetzt zu Wurzeln der Gleichung $f(z) = 0$ gewählt werden, aus der ersten der Gleichungen (30), wenn i die Werthe 1, 2, 3, ... n erhält,

$$\begin{aligned}
\varepsilon^0_{1,m} &= e^{-z_0} \cdot \alpha_0 - e^{-z_1} \cdot \alpha_1 \\
\varepsilon^0_{2,m} &= e^{-z_0} \cdot \alpha_0 - e^{-z_2} \cdot \alpha_2 \\
&\cdots\cdots\cdots \\
\varepsilon^0_{n,m} &= e^{-z_0} \cdot \alpha_0 - e^{-z_n} \cdot \alpha_n,
\end{aligned}$$

und, wenn diese Gleichungen der Reihe nach mit $e^{z_1}N_1$, $e^{z_2}N_2$, ... $e^{z_n}N_n$ multiplicirt und dann addirt werden, die nachstehende Gleichung:

$$\begin{aligned}
&e^{z_1} \cdot \varepsilon^0_{1,m} \cdot N_1 + e^{z_2} \cdot \varepsilon^0_{2,m} \cdot N_2 + \cdots + e^{z_n} \cdot \varepsilon^0_{n,m} \cdot N_n \\
&= e^{-z_0}\alpha_0 (e^{z_1}N_1 + e^{z_2}N_2 + \cdots + e^{z_n}N_n) \\
&- (\alpha_1 N_1 + \alpha_2 N_2 + \cdots + \alpha_n N_n).
\end{aligned}$$

Diese nimmt aber unter der gemachten Voraussetzung, dass die Gleichung (32) besteht, die Form an:

$$\begin{aligned}
&\alpha_0 N_0 + \alpha_1 N_1 + \alpha_2 N_2 + \cdots + \alpha_n N_n \\
&= -(e^{z_1}\varepsilon^0_{1,m}N_1 + e^{z_2}\varepsilon^0_{2,m}N_2 + \cdots + e^{z_n}\varepsilon^0_{n,m}N_n).
\end{aligned} \tag{33}$$

Hier steht links eine ganze Zahl. Da man andererseits, dem bekannten Mittelwerthsatze der Theorie der bestimmten Integrale gemäss,

$$\varepsilon^0_{i,m} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (m-1)} \cdot \int_{z_0}^{z_i} e^{-z} \cdot \frac{f(z)^m}{z - z_0}\, dz$$

gleich

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (m-1)} \cdot \frac{f(\xi)^m}{\xi - z_0} \cdot \int_{z_0}^{z_i} e^{-z}\, dz$$

$$= \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} \cdot \frac{f(\xi)^{m-1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (m-1)} \cdot (e^{-z_0} - e^{-z_i})$$

setzen darf, wo unter ξ ein gewisser Werth zwischen den Grenzen z_0, z_i zu verstehen ist, und da folglich mit unendlich wachsendem m der Werth von $\varepsilon^0_{i,m}$ zugleich mit dem zweiten Faktor des letzten Ausdruckes unendlich abnimmt, welchen Werth i auch hat, so wird die rechte Seite der Gleichung (33) mit wachsendem m unter jeden Grad von Kleinheit herabsinken, von einem gewissen Augenblicke an folglich unter der Einheit liegen, also die Gleichung (33) nicht, wie sie doch erhalten ist, für jeden Werth von m möglich sein, wenn nicht die ganze Zahl links gleich Null ist. So gelangt man zu der ersten Gleichung des nachfolgenden Systems:

$$\begin{aligned}
&\alpha_0 N_0 + \alpha_1 N_1 + \alpha_2 N_2 + \cdots + \alpha_n N_n = 0\\
&\beta_0 N_0 + \beta_1 N_1 + \beta_2 N_2 + \cdots + \beta_n N_n = 0\\
&\qquad\qquad\qquad

$$\varepsilon_m^1 = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (m-1)} \cdot \int_0^x e^{-z} \cdot z^m (z-x)^{m-1} dz;$$

ferner ist

$$\varphi(z, \zeta) = z + (\zeta_1 + s_0 + 1)$$
$$f(z) = z^2 - xz,$$

also

$$p_1 = -x, \quad \zeta_1 = \zeta + p_1 = \zeta - x, \quad s_0 = 2m$$

und daher

$$\varphi(z, \zeta) = z + (\zeta + 2m + 1 - x).$$

Demnach liefern die Gleichungen (26), wenn m um eine Einheit vergrössert wird,

$$\varepsilon_{m+1}^0 = (2m + 1 - x)\,\varepsilon_m^0 + (2m + 1)\,\varepsilon_m^1$$
$$\varepsilon_{m+1}^1 = (2m + 1)\,\varepsilon_m^0 + (2m + 1 + x)\,\varepsilon_m^1,$$

woraus durch Subtraktion und mit Rücksicht auf die Gleichung $\varepsilon_m = \varepsilon_m^0 + \varepsilon_m^1$ die folgende:

(34) $$\varepsilon_{m+1}^1 - \varepsilon_{m+1}^0 = x \cdot \varepsilon_m,$$

durch Addition und mit Rücksicht auf die Gleichung $\varepsilon_{m+1}^0 + \varepsilon_{m+1}^1 = \varepsilon_{m+1}$ die andere:

(35) $$\varepsilon_{m+1} = (4m + 2)\,\varepsilon_m + x(\varepsilon_m^1 - \varepsilon_m^0)$$

hervorgeht. Da aus (34) aber

$$\varepsilon_{m+1}^1 = \frac{\varepsilon_{m+1} + x \cdot \varepsilon_m}{2}$$

$$\varepsilon_{m+1}^0 = \frac{\varepsilon_{m+1} - x \cdot \varepsilon_m}{2}$$

oder, indem m in $m - 1$ verwandelt wird, für $m > 1$

$$\varepsilon_m^1 = \frac{\varepsilon_m + x\varepsilon_{m-1}}{2}$$

$$\varepsilon_m^0 = \frac{\varepsilon_m - x\varepsilon_{m-1}}{2}$$

gefunden wird, so nimmt die zuletzt erhaltene Gleichung für $m > 1$ die Gestalt an:

(36) $$\varepsilon_{m+1} = (4m + 2)\,\varepsilon_m + x^2 \cdot \varepsilon_{m-1}.$$

Dieselbe gilt jedoch auch für $m = 1$; denn man findet ohne Mühe die Formeln:

$$\varepsilon_0 = 1 - e^{-x}, \quad \varepsilon_1 = 2 - x - e^{-x}(2 + x)$$
$$\varepsilon_2 = 12 - 6x + x^2 - e^{-x}(12 + 6x + x^2)$$

und vermittelst derselben in der That

$$\varepsilon_2 = 6 \cdot \varepsilon_1 + x^2 \cdot \varepsilon_0.$$

Aus der so gewonnenen Reduktionsformel, welche der Formel (8) der vorigen Vorlesung völlig analog ist, geht nun für $\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}$ ein Kettenbruch, und da

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} = 2 - \frac{e^x + 1}{e^x - 1} \cdot x$$

ist, folgender Kettenbruch hervor:

$$\frac{e^x - 1}{e^x + 1} = \cfrac{x}{2 + \cfrac{x^2}{6 + \cfrac{x^2}{10 + \cfrac{x^2}{14 + \cdots}}}},$$

welcher sich sogleich in den früher nach Lambert für

$$\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

angegebenen verwandelt, wenn $2x$ statt x eingeführt und die Gleichheit

$$\frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

beachtet wird.

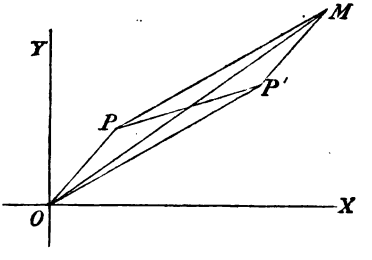
Achte Vorlesung.

Die Ludolph'sche Zahl π.

1. Wir wenden uns nunmehr zur Betrachtung der Zahl π und beginnen mit einer allgemeinen Vorbemerkung. Bei den Hermite'schen Untersuchungen verstanden wir unter z_0, z_1, z_2, ... z_n stets reelle, zuletzt sogar ganze reelle Zahlen; im

Folgenden wird z_0 stets gleich Null, $z_1, z_2, \ldots z_n$ werden jedoch als die Wurzeln einer beliebigen Gleichung n^{ten} Grades mit ganzzahligen Coefficienten vorausgesetzt werden, und demnach auch imaginäre oder allgemeiner complexe Werthe bedeuten können. Die Grössen, welche unter (24) vor. Vorlesung mit ε_m, ε_m^h bezeichnet worden sind, werden dann aber bestimmte Integrale, deren Grenzen imaginär sind, und bei denen also die Veränderliche z eine complexe Werthreihe, einen sogenannten complexen Integrationsweg durchläuft. Auf die Theorie der complexen Funktionen und ihrer Integrale hier näher einzugehen, können wir uns nicht gestatten, jedoch mögen einige wenige Punkte, auf die es hier ankommt, kurz erwähnt oder in Erinnerung gerufen werden.

Eine complexe Grösse $x + yi$ lässt sich durch denjenigen Punkt einer Ebene geometrisch darstellen, welchem die rechtwinkligen Coordinaten x, y entsprechen, oder, was dasselbe ist, wenn $x + yi$ in der „Normalform" $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ geschrieben wird, durch den Punkt P mit den Polarcoordinaten r, φ oder auch durch den nach Grösse und Richtung gedachten Radiusvektor OP, welcher vom Coordinatenanfangspunkte O nach P hinführt. Die Grösse dieses Radiusvektors, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, ist der sogenannte Modulus oder absolute Betrag der complexen Grösse $x + yi$.



Entsprechen so die Punkte P, P' den zwei complexen Grössen $x + yi$, $x' + y'i$, so wird die Differenz zwischen letzteren, $(x' + y'i) - (x + yi)$, durch die, nach Grösse und Richtung gedachte Strecke PP' geometrisch dargestellt; die Summe beider dagegen durch die andere Diagonale OM des über OP und OP' gezeichneten Parallelogramms. Aus diesem

letzteren Umstande folgt nach bekanntem Dreieckssatze leicht folgender

Satz: Der Modulus einer Summe zweier complexer Grössen ist niemals grösser als die Summe der Moduln der complexen Grössen selbst; ein Satz, der auf beliebig viel Summanden sofort erweitert werden kann.

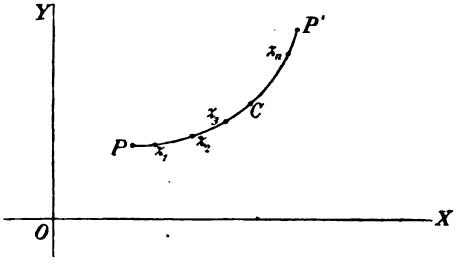
Da jeder complexen Grösse ein Punkt der Ebene entspricht, wird einer veränderlichen complexen Grösse ein beweglicher Punkt entsprechen, und einer stetigen Reihe complexer Werthe eine zusammenhängende Curve, welche der entsprechende Punkt beschreibt, und welche der Weg der complexen Veränderlichen genannt wird; und umgekehrt entspricht jedem beliebigen Wege zwischen zwei Punkten P, P' eine stetige Werthreihe der complexen Veränderlichen. Da es unendlich viel verschiedene solche Wege giebt, ist's auch einer complexen Veränderlichen möglich, auf unendlich mannigfaltige Weise stetig von einem bestimmten Werthe zu einem zweiten überzugehen.

Eine complexe Grösse $w = u + vi$, welche für jeden Werth einer complexen Veränderlichen $z = x + yi$ einen gleichfalls bestimmten Werth hat und sich also im allgemeinen gleichzeitig mit z verändert, heisst — nach Riemann — eine Funktion von z, $w = f(z)$, wenn sie der partiellen Differenzialgleichung $\frac{\partial w}{\partial y} = i\frac{\partial w}{\partial x}$ genügt; sie heisst stetig längs eines bestimmten Weges der Veränderlichen z, wenn der sie darstellende Punkt, während z jenen Weg beschreibt, gleichfalls eine stetig zusammenhangende Curve, d. i. einen Weg durchläuft.

Man denke sich nun zwei complexe Werthe ζ, ζ' und zwischen ihnen einen beliebig gegebenen Weg, dargestellt bez. durch die Punkte P, P' und die Curve PCP'. Zwischen den Endpunkten denke man beliebig viel, beliebig nahe Zwischenpunkte $z_1, z_2, \ldots z_n$ eingeschaltet und bezeichne die ihnen entsprechenden complexen Werthe gleichfalls durch $z_1, z_2, \ldots z_n$. Mit $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ bezeichne man Punkte innerhalb der einzelnen Abschnitte $Pz_1, z_1z_2, z_2z_3, \ldots z_nP'$ der Curve, bez. die ihnen entsprechenden complexen Werthe, und mit $f(z)$ irgend eine Funktion von z. Die folgende Summe:

$$(1) \quad S = f(\xi_0)(z_1 - \xi) + f(\xi_1)(z_2 - z_1) + f(\xi_2)(z_3 - z_2) + \cdots + f(\xi_n)\cdot(\xi' - z_n)$$

hängt dann zwar offenbar ab sowohl von der Anzahl, als auch von der Lage der einzelnen Zwischenwerthe auf der Curve, und folglich auch von dem bestimmten Wege der Veränderlichen z, welcher zwischen ξ und ξ' gewählt worden ist; aber



es lässt sich zeigen, dass, wenn die Menge der Zwischenwerthe durch stets fortgesetzte Einschaltung unendlich wächst und die Zwischenwerthe zugleich einander unendlich nahe rücken, jene Summe im allgemeinen für jeden bestimmten Weg gegen einen gleichfalls ganz bestimmten Grenzwerth convergirt, welcher das, diesem bestimmten Integrationswege entsprechende Integral von $f(z)$, in Zeichen:

$$\int_{\xi}^{\xi'} f(z)\,dz,$$

genannt wird; und ferner, dass die, den verschiedensten, zwischen ξ und ξ' möglichen Integrationswegen entsprechenden Integrale gleichwerthig, das Integral mit andern Worten unabhängig ist vom Integrationswege, vorausgesetzt, dass jene Wege gewisse Punkte der Ebene, welche kritische Punkte der Funktion $f(z)$ heissen, nicht mitsammen umschliessen.

2. Für die oben erwähnten, mit ε_m, ε_m^h bezeichneten Integrale wäre der einzige, dem Faktor e^{-z} der zu integrirenden Funktion entspringende kritische Punkt der Unendlichkeitspunkt der Ebene, $z = \infty$. Wir wollen ihn ausschliessen, d. h. die Integrationswege, sonst zwar beliebig, doch so gewählt voraussetzen, dass sie nicht durch $z = \infty$ hindurchführen;

dann haben ε_m, $\overset{h}{\varepsilon}_m$ ganz bestimmte, vom Integrationswege unabhängige endliche Werthe, die freilich complex sein werden. Trotz dieser wesentlichen Aenderung des arithmetischen Verhaltens der Grössen ε_m, $\overset{h}{\varepsilon}_m$ werden aber gleichwohl die Beziehungen (25) und (26), sowie die daraus abgeleiteten Gleichungen (27), (30) und (31) vor. Vorlesung bestehen bleiben; denn sie ergeben sich aus den Formeln, welche in No. 1—3 jener Vorlesung enthalten sind, und diese sprechen lediglich identische Umformungen aus und müssen deshalb sowohl für reelle, wie für complexe Werthe der Grössen z und $z_1, z_2, \ldots z_n$ in Geltung bleiben.

Da ferner, wie in No. 3 vor. Vorlesung bemerkt worden ist, die Funktion $\varphi_i(\zeta)$ eine ganze Funktion von ζ mit ganzzahligen Coefficienten ist, wenn, wie hier vorausgesetzt wurde, $z_1, z_2, \ldots z_n$ einer Gleichung mit ganzzahligen Coefficienten Genüge leisten, so wird $\varphi(z, \zeta)$ in diesem Falle eine ganze Funktion von z und ζ, also $\varphi(z_i, z_k)$ eine ganze Funktion von z_i, z_k mit ganzzahligen Coefficienten. Da ganz dieselbe Bemerkung sich bezüglich der Grössen $\Phi(z_i, z_k)$ wiederholen lässt, so werden nicht nur die Coefficienten $A, B, \ldots L$ der Gleichungen (27), sondern auch die unter (31) vor. Vorlesung gegebenen Werthe der Grössen $\alpha_i, \beta_i, \ldots \lambda_i$ ganze Funktionen der Wurzeln $z_1, z_2, \ldots z_n$ mit ganzzahligen Coefficienten.

3. Der Keim der Lindemann'schen Betrachtung über die Zahl π ist nun folgende einfache Ueberlegung: Lässt sich zeigen, dass e^{ζ} nicht rational sein kann, so oft ζ eine algebraische Zahl ist, so folgt aus dem Bestehen der Gleichung $e^{\pi i} = -1$ unmittelbar, dass πi und folglich auch π keine algebraische, also nur eine transcendente Zahl sein kann. — Es genügt aber, hierbei ζ als eine ganze algebraische Zahl anzunehmen. Denn, sei im Gegentheil ζ Wurzel der Gleichung

$$\zeta^r + p_1\zeta^{r-1} + p_2\zeta^{r-2} + \cdots + p_r = 0 \tag{2}$$

mit rationalen Coefficienten, sodass $p_i = \frac{q_i}{q}$ gesetzt werden

kann, unter q, q_i ganze Zahlen, unter q nämlich den Generalnenner aller p_i verstanden, so leistet $\zeta' = q\zeta$ der Gleichung

$$\zeta'^r + Q_1\zeta'^{r-1} + Q_2\zeta'^{r-2} + \cdots + Q_r = 0$$

Genüge, in welcher die Coefficienten $Q_i = q_i q^{i-1}$ sämmtlich ganze Zahlen sind, ist also eine ganze algebraische Zahl. Wird aber e^ζ als rational angenommen, so folgt für $e^{\zeta'} = (e^\zeta)^q$ dasselbe; aus dem Nachweise also, dass $e^{\zeta'}$ nicht rational sein kann, sobald ζ' eine ganze algebraische Zahl ist, folgt dieselbe Unmöglichkeit für e^ζ, wenn ζ eine beliebige algebraische Zahl bezeichnet. Hiernach dürfen wir uns im Folgenden auf die Voraussetzung beschränken, dass die Coefficienten der Gleichung (2) ganze Zahlen sind. Auch werden wir offenbar die Allgemeinheit nicht beeinträchtigen, wenn wir jene Gleichung als irreduktibel voraussetzen; denn, wäre die ganze Funktion zur Linken von (2) nicht irreduktibel, so würde sie in irreduktible Faktoren zerlegt werden können, und eine Grösse ζ, welche die Gleichung (2) erfüllt, müsste einen dieser Faktoren zu Null machen und würde daher Wurzel einer ähnlichen irreduktiblen Gleichung sein, welche statt (2) unserer Betrachtung zu Grunde gelegt werden könnte. Bezeichnet man daher mit $\zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_r$ die Wurzeln der jetzt als irreduktibel anzunehmenden Gleichung (2), so müssen diese bekanntlich alle von einander verschieden sein, weil sonst die ganze Funktion zur Linken mit ihrer Abgeleiteten einen rationalen Faktor gemeinsam haben, also nicht irreduktibel sein würde.

Die Grössen

$$e^{\zeta_1}, e^{\zeta_2}, \ldots e^{\zeta_r} \tag{3}$$

sind die Wurzeln der Gleichung

$$(Z - e^{\zeta_1}) \cdot (Z - e^{\zeta_2}) \cdots (Z - e^{\zeta_r}) = 0$$

d. h., entwickelt geschrieben, der Gleichung r^{ten} Grades

$$Z^r + M_1 Z^{r-1} + M_2 Z^{r-2} + \cdots + M_r = 0, \tag{4}$$

deren Coefficienten, vom Vorzeichen abgesehen, mit den folgenden Ausdrücken identisch sind:

$$\sum e^{\zeta_1}, \quad \sum e^{\zeta_1+\zeta_2}, \quad \sum e^{\zeta_1+\zeta_2+\zeta_3}, \quad \ldots \quad e^{\zeta_1+\zeta_2+\cdots+\zeta_r}. \tag{5}$$

Hier ist nämlich die erste Summe die Summe der Grössen (3) selbst; die zweite ist die Summe aller Produkte aus zweien von ihnen, d. i. die Summe aller Ausdrücke, welche aus $e^{\zeta_1+\zeta_2}$ entstehen, wenn statt $\zeta_1 + \zeta_2$ die Summe je zweier der Grössen $\zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_r$ oder die algebraisch verschiedenen Werthe gesetzt werden, welche die Funktion $\zeta_1 + \zeta_2$ von den Wurzeln der Gleichung (2) durch Vertauschung dieser Wurzeln annimmt; u. s. w. Wird nun vorausgesetzt, dass eine der Grössen (3) rational sei, etwa $e^{\zeta_1} = \frac{\mu}{\nu}$, so würde die Gleichung (4), wenn $Z = \frac{\mu}{\nu}$ gesetzt wird, befriedigt und die entstehende Identität würde folgende Gestalt annehmen:

$$(6)\quad N_0 + N_1 \cdot \sum e^{\zeta_1} + N_2 \cdot \sum e^{\zeta_1+\zeta_2} + \cdots + N_r \cdot e^{\zeta_1+\zeta_2+\cdots+\zeta_r} = 0,$$

in welcher $N_0, N_1, N_2, \ldots N_r$ ganze Zahlen bedeuten, welche nicht sämmtlich gleich Null sind; zum Beweise des Lindemann'schen Vorhabens bleibt demnach nur die Unmöglichkeit einer Beziehung dieser Art nachzuweisen.

4. Wir verfolgen hierzu zunächst den Fall, in welchem für jede der in den Exponenten stehenden Wurzelfunktionen $\zeta_1, \zeta_1 + \zeta_2, \zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3, \ldots$ die algebraisch verschiedenen Werthe, welche sie bei den Permutationen der Wurzeln annehmen, auch numerisch von einander verschieden sind. Ist nun

$$F(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \ldots \zeta_r)$$

irgend eine ganze Funktion der Wurzeln mit ganzzahligen Coefficienten, so leisten die numerisch verschiedenen Werthe derselben, wie hier als bekannt vorausgesetzt werden muss, einer Gleichung Genüge, welche ebenso wie die gegebene Gleichung (2) ganzzahlige Coefficienten hat und irreduktibel ist. Da hiernach auch die Werthe der Exponenten in jeder der in der Beziehung (6) auftretenden Summen die Wurzeln einer solchen Gleichung sein werden, so kann zunächst keiner aller jener Exponenten Null sein, ausgenommen etwa allein der letzte, $\zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 + \cdots + \zeta_r$, welcher Null wird, wenn in der Gleichung (2) $p_1 = 0$ wäre. Ferner aber darf man alle

jene Exponenten auch als verschieden von einander voraussetzen, nicht nur die in derselben Summe, was bereits geschehen ist, sondern auch die zu verschiedenen Summen gehörigen; denn, wären zwei solche einander gleich, so müssten die irreduktibeln Gleichungen, denen sie genügen, mit einander identisch sein, also alle Wurzeln gemeinsam haben; dann wären aber jene Summen gleichfalls mit einander identisch und man könnte sie in ein einziges Glied zusammenfassen, ebenso wie in dem vorher erwähnten Falle $p_1 = 0$ das erste und letzte Glied, und erhielte so eine andere Beziehung von ganz ähnlicher Beschaffenheit wie die Beziehung (6), und könnte mit dieser in derselben Weise verfahren wie mit der ursprünglichen, wenn darin alle Exponenten von vornherein als von Null und von einander verschieden vorausgesetzt werden.

Endlich hat irgend welche Vertauschung unter den Wurzeln $\zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_r$ nur die Wirkung, dass in jeder der Summen die Exponenten nur unter einander auf gewisse Weise gleichzeitig vertauscht werden.

Dies vorausgeschickt, setze man

$$(7) \qquad z_1 = \zeta_1, \quad z_2 = \zeta_2, \quad \ldots \quad z_r = \zeta_r,$$

bezeichne mit

$$(7) \qquad z_{r+1}, \quad z_{r+2}, \quad \ldots \quad z_{r+\varrho}$$

die Werthe, welche die Exponenten der zweiten Summe haben u. s. w., endlich mit

$$(7) \qquad z_n$$

den Exponenten $\zeta_1 + \zeta_2 + \cdots + \zeta_r$ — welcher dem Gesagten zufolge für die anzustellende Betrachtung als von Null verschieden angesehen werden darf —, so sind, wie leicht einzusehen, $z_1, z_2, \ldots z_n$ die von Null und von einander verschiedenen Wurzeln einer Gleichung n^{ten} Grades mit ganzzahligen Coefficienten. Die Gleichung (6), deren Unmöglichkeit nachgewiesen werden soll, ist demnach nur ein specieller Fall der Gleichung (32) vor. Vorlesung, und man zieht daraus, ähnlich wie aus jener die Gleichung (33), nachstehende Folgegleichungen:

$$(8)\quad \begin{cases} \alpha_0 N_0 + (\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_r) N_1 + (\alpha_{r+1} + \cdots + \alpha_{r+\varrho}) N_2 \\ \qquad + \cdots + \alpha_n N_n = \xi_0 \\ \beta_0 N_0 + (\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_r) N_1 + (\beta_{r+1} + \cdots + \beta_{r+\varrho}) N_2 \\ \qquad + \cdots + \beta_n N_n = \xi_1 \\ \gamma_0 N_0 + (\gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_r) N_1 + (\gamma_{r+1} + \cdots + \gamma_{r+\varrho}) N_2 \\ \qquad + \cdots + \gamma_n N_n = \xi_2 \\ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \lambda_0 N_0 + (\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_r) N_1 + (\lambda_{r+1} + \cdots + \lambda_{r+\varrho}) N_2 \\ \qquad + \cdots + \lambda_n N_n = \xi_n, \end{cases}$$

in denen zur Abkürzung gesetzt ist:

$$(9)\quad \begin{aligned} \xi_0 = -\big[&(e^{z_1}\varepsilon^0_{1,m} + \cdots + e^{z_r}\varepsilon^0_{r,m}) N_1 \\ &+ (e^{z_{r+1}}\varepsilon^0_{r+1,m} + \cdots + e^{z_{r+\varrho}}\varepsilon^0_{r+\varrho,m}) N_2 \\ &+ \cdots + e^{z_n}\varepsilon^0_{n,m} N_r\big] \end{aligned}$$

und $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ die entsprechende Bedeutung haben.

5. Vertauscht man nun zwei Grössen z_i, z_k mit einander, welche ein- und derselben der unter (7) unterschiedenen Gruppen von Wurzeln angehören, z. B. z_1 mit z_2, so geht, da allgemein

$$\varepsilon^h_{i,m} = \frac{1}{1.2.3\ldots(m-1)} \int_{z_0}^{z_i} e^{-z} \cdot \frac{f(z)^m}{z - z_h}\, dz$$

war, $\varepsilon^h_{1,m}$ in $\varepsilon^h_{2,m}$ und umgekehrt über, wenn h von 1, 2 verschieden ist, während $\varepsilon^h_{g,m}$ dabei unverändert bleibt, wenn auch g weder 1 noch 2 gleich ist. Es geht also z. B.

$$\varepsilon^0_{1,m} = e^{-z_0} \cdot \alpha_0 - e^{-z_1} \cdot \alpha_1 \quad \text{in} \quad \varepsilon^0_{2,m} = e^{-z_0} \cdot \alpha_0 - e^{-z_2} \cdot \alpha_2$$

d. h. α_1 in α_2 und umgekehrt über, während

$$\varepsilon^0_{g,m} = e^{-z_0} \cdot \alpha_0 - e^{-z_g} \cdot \alpha_g$$

d. h. alle übrigen α ungeändert bleiben, wenn z_1 und z_2 vertauscht werden; bei solcher Vertauschung wird also die linke Seite der ersten Gleichung (8) ungeändert bleiben, ebenso diejenigen der 4ten, 5ten u. s. w., weil diesen die Werthe 3, 4, ... des Index h zukommen würden. Dagegen geht bei derselben Vertauschung

$$\varepsilon^1_{1,m} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (m-1)} \int_{z_0}^{z_1} e^{-z} \cdot \frac{f(z)^m}{z - z_1}\, dz$$

in

$$\varepsilon^2_{2,m} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (m-1)} \int_{z_0}^{z_2} e^{-z} \cdot \frac{f(z)^m}{z - z_2}\, dz$$

und umgekehrt über, desgleichen $\varepsilon^1_{2,m}$ in $\varepsilon^2_{1,m}$ und umgekehrt, endlich, wenn g von 1 und 2 verschieden ist,

$$\varepsilon^1_{g,m} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (m-1)} \int_{z_0}^{z_g} e^{-z} \cdot \frac{f(z)^m}{z - z_1}\, dz$$

in

$$\varepsilon^2_{g,m} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (m-1)} \int_{z_0}^{z_g} e^{-z} \cdot \frac{f(z)^m}{z - z_2}\, dz$$

über und umgekehrt; d. h., da

$$\varepsilon^1_{1,m} = e^{-z_0}\beta_0 - e^{-z_1}\beta_1, \quad \varepsilon^2_{2,m} = e^{-z_0}\gamma_0 - e^{-z_2}\gamma_2$$
$$\varepsilon^1_{2,m} = e^{-z_0}\beta_0 - e^{-z_2}\beta_2, \quad \varepsilon^2_{1,m} = e^{-z_0}\gamma_0 - e^{-z_1}\gamma_1$$
$$\varepsilon^1_{g,m} = e^{-z_0}\beta_0 - e^{-z_g}\beta_g, \quad \varepsilon^2_{g,m} = e^{-z_0}\gamma_0 - e^{-z_g}\gamma_g$$

ist, es vertauschen sich, wenn z_1 und z_2 vertauscht werden, gleichzeitig β_0 und γ_0, β_1 und γ_2, β_2 und γ_1, endlich, sobald g von 1, 2 verschieden ist, auch β_g und γ_g. Offenbar wird hierdurch die linke Seite der zweiten Gleichung (8) sich mit derjenigen der dritten vertauschen, da β_1, β_2 bez. γ_1, γ_2 je derselben Summe angehören.

Man findet also im Ganzen: wenn irgend zwei derselben Gruppe (7) angehörige Grössen z_i, z_k vertauscht werden, so ändern sich in den Gleichungen (8) die linken Seiten nicht bis auf zwei, welche mit einander tauschen; und zwar bleibt die linke Seite der ersten jener Gleichungen immer ungeändert, da der ihr entsprechende Werth des Index h, nämlich $h = 0$, immer von i und k verschieden ist. Weil nun jede Permutation der Grössen $z_1, z_2, z_3, \ldots z_n$, bei welcher nur immer solche dieser Grössen unter einander vertauscht werden, welche je derselben Gruppe (7) angehören, durch eine

Reihe Vertauschungen von zwei derselben Gruppe zugehörigen Grössen z_i, z_k hervorgebracht werden kann, gewinnt man sogleich das allgemeinere Ergebniss: Bei jeder der angegebenen Permutationen bleibt die linke Seite der ersten Gleichung (8) ungeändert, diejenigen der anderen aber vertauschen sich nur unter einander.

Nun wissen wir aber schon, dass, wie immer auch die Wurzeln $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_r$ unter einander vertauscht werden mögen, nur solche Vertauschungen zwischen den Grössen $z_1, z_2, \ldots z_n$ daraus hervorgehen, wie sie soeben angegeben wurden. Das gewonnene Ergebniss lässt sich demnach auch so aussprechen: Bei den Vertauschungen der Wurzeln $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_r$ bleibt die linke Seite der ersten Gleichung (8) ungeändert, die n Ausdrücke auf den linken Seiten der übrigen Gleichungen (8) aber vertauschen sich unter einander, und deshalb werden Ausdrücke, welche symmetrisch aus ihnen zusammengesetzt sind, gleichfalls ungeändert bleiben. Beispielsweise, wenn man die Gleichung aufstellte, welche die genannten n Ausdrücke zu Wurzeln hat, so würden die Coefficienten derselben solche symmetrische Ausdrücke sein und würden sich also bei den Vertauschungen der Wurzeln $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_r$ der Gleichung (2) nicht verändern. Nun sind aber die Ausdrücke zur Linken der Gleichungen (8) gemäss der Bedeutung der Zeichen $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \lambda$ ganze und ganzzahlige Funktionen der Grössen $z_1, z_2, \ldots z_n$ und demnach auch der Wurzeln $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_r$, und die Coefficienten der Gleichung (2) sind als ganze Zahlen vorausgesetzt worden. Nach den bekanntesten Sätzen über symmetrische Wurzelfunktionen findet sich hieraus endlich, dass die linke Seite der ersten Gleichung (8) einer ganzen Zahl — sie heisse U — gleich, die linken Seiten der n übrigen Gleichungen aber die Wurzeln einer Gleichung n^{ten} Grades

$$(10) \qquad V^n + U_1 \cdot V^{n-1} + U_2 \cdot V^{n-2} + \cdots + U_n = 0$$

sein müssen, deren Coefficienten U_i ebenfalls sämmtlich ganzzahlig sind.

6. Die Gleichungen (8), sowie die aus ihnen gezogenen Folgerungen bestehen für jeden Werth, welchen man m bei-

legen mag, und werden demnach auch bestehen bleiben, wenn wir m unendlich wachsen lassen. Wir wollen untersuchen, was dabei aus den mit $\xi_0, \xi_1, \ldots \xi_n$ bezeichneten rechten Seiten jener Gleichungen werden wird. Nun war in dem Integrale

$$\int_{z_0}^{z_i} e^{-z} \cdot \frac{f(z)^m}{z - z_h} dz \tag{11}$$

der Integrationsweg abgesehen davon, dass er im Endlichen bleiben muss, ein ganz beliebiger; doch wollen wir jetzt übereinkommen, ihn so zu wählen, dass er nicht durch einen der Punkte $z_1, z_2, \ldots z_n$ hindurchführe und dass seine Länge, welche l_i^h heisse, nur endlich sei. Auf diesem Wege wird dann nicht nur $f(z)$, sondern auch $\frac{e^{-z}}{z - z_h}$ endliche Werthe behalten, sodass der absolute Betrag jeder dieser Funktionen auf demselben eine obere Grenze haben, nämlich einen endlichen Werth, welcher M_i^h, M_i^h resp. heissen möge, nicht überschreiten wird. Der absolute Betrag des Integrales (11) wird demnach einem einfachen Principe zufolge auch nicht grösser sein können, als eine leicht angebbare Grösse. Bedenkt man nämlich, dass das Integral, der in No. 2 gegebenen Definition gemäss, nichts anderes ist, als eine Summe von unendlich viel Summanden von der Form

$$\frac{e^{-z}}{z - z_h} \cdot f(z)^m \cdot (z_{k+1} - z_k),$$

so kann infolge des dort hervorgehobenen Satzes sein Modulus nie grösser sein als die Summe der Moduln der einzelnen Summanden, d. i.

$$\sum \mathrm{mod} \cdot \frac{e^{-z}}{z - z_h} \cdot \mathrm{mod} \cdot f(z)^m \cdot \mathrm{mod} \cdot (z_{k+1} - z_k),$$

und umsomehr nicht grösser als

$$\sum M_i'^h \cdot (M_i^h)^m \cdot \mathrm{mod}\,(z_{k+1} - z_k).$$

Hier ist aber $\mathrm{mod}\,(z_{k+1} - z_k)$ gleich dem Abstande der beiden Curvenpunkte z_k, z_{k+1} von einander d. h. gleich dem Curvenelemente; und da letztere zusammengenommen die ganze Länge

l_i^h des Weges ausmachen, findet sich endlich der absolute Betrag des Integrales nicht grösser als

$$(M_i^h)^m \cdot M_i'^h \cdot l_i^h,$$

also

$$\text{der abs. B. v. } \varepsilon_{i,m}^h < \frac{(M_i^h)^m \cdot M_i'^h \cdot l_i^h}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (m-1)}.$$

Bezeichnen also M, M', l die grössten unter den Werthen M_i^h, $M_i'^h$, l_i^h resp., welche allen Combinationen h, i entsprechen, so findet man schliesslich, dass die sämmtlichen Grössen $\varepsilon_{i,m}^h$ ihrem absoluten Betrage nach die Grenze

$$\frac{M^{m-1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (m-1)} \cdot MM'l$$

nicht überschreiten. Hierbei sind M, M', l Werthe, welche von m unabhängig sind, und demnach sinkt die bezeichnete Grenze wegen ihres ersten Faktors mit unendlich wachsendem m schliesslich unter jeden Grad von Kleinheit herab. Gleiches wird demnach auch mit dem absoluten Betrage der Grössen $\varepsilon_{i,m}^h$ und Gleiches also auch mit demjenigen der Grössen ξ_0, ξ_1, ξ_2, ... ξ_n geschehen: für alle m, welche eine gewisse Zahl μ übertreffen, wird der absolute Betrag dieser Grössen beliebig klein sein, z. B. derjenige von ξ_0 kleiner als Eins. Da aber die linke Seite der ersten der Gleichungen (8), welche gleich ξ_0 war, immer eine ganze Zahl ist, muss für alle $m > \mu$ ihr Werth die Null sein.

Die linken Seiten der übrigen n Gleichungen (8) waren aber die Wurzeln der Gleichung (10); da nach dem Gesagten diese Wurzeln sämmtlich nach ihrem absoluten Betrage beliebig klein werden, sobald $m > \mu$ ist, muss das Gleiche auch gelten von ihren Coefficienten U_1, U_2, ... U_n; diese letzteren werden z. B., μ hinreichend gross gewählt, sämmtlich kleiner als Eins und folglich, da sie ganze Zahlen bedeuten, sämmtlich gleich Null sein müssen. Dann sind es aber auch die Wurzeln der Gleichung (10) selbst, d. h. die linken Seiten der Gleichungen (8). Man findet also im Ganzen, dass für alle hinreichend grossen Werthe von m die Gleichungen stattfinden:

$$\alpha_0 N_0 + (\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_r) N_1 + (\alpha_{r+1} + \cdots + \alpha_{r+\varrho}) N_2 + \cdots + \alpha_n N_r = 0$$

$$\beta_0 N_0 + (\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_r) N_1 + (\beta_{r+1} + \cdots + \beta_{r+\varrho}) N_2 + \cdots + \beta_n N_r = 0$$

. . . . . .

$$\lambda_0 N_0 + (\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_r) N_1 + (\lambda_{r+1} + \cdots + \lambda_{r+\varrho}) N_2 + \cdots + \lambda_n N_r = 0,$$

welche doch nur stattfinden können, da die N_i nicht sämmtlich Null sein sollten, wenn die aus den Grössen α_i, β_i, γ_i, ... λ_i gebildete Determinante verschwindet. Dies kann aber nur geschehen, wie gelegentlich der Zahl e gezeigt ist, wenn die Discriminante der Gleichung mit den Wurzeln $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n$ verschwindet, und geschieht also nicht, wenn diese Grössen, wie hier vorausgesetzt werden durfte, von einander verschieden sind.

Hiermit ist die Unmöglichkeit der Beziehung (6) unter der am Anfange von No. 4 gemachten Annahme erwiesen.

Wir müssten nunmehr auch den Fall erledigen, wo die algebraisch verschiedenen Werthe der Wurzelfunktionen $\xi_1 + \xi_2$, $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3$, ..., welche in der Gleichung (6) als Exponenten sich finden, nicht sämmtlich auch numerisch ungleich sind. Dann erst wäre der Beweis für die Transcendenz der Zahl π vollständig erbracht. Dieser Theil der Lindemann'schen Untersuchung bietet nun aber gewisse Schwierigkeiten dar, insofern er eine weitere Bekanntschaft mit dem Verhalten der Wurzelfunktionen bei Vertauschung der Wurzeln erfordert, als hier für bekannt angenommen werden soll; deshalb, und weil durch das bereits Gesagte die Art und Weise jener Untersuchung genügend gekennzeichnet worden ist, ziehe ich es vor, den zu leistenden Beweis auf einem einfacheren Wege zu erbringen, nämlich statt der Lindemann'schen Darstellung noch in Kürze den wesentlichsten Inhalt der Abhandlung mitzutheilen, in welcher Weierstrass dieselbe zu vereinfachen gesucht und gelehrt hat.

Neunte Vorlesung.

Weierstrass' Beweis von der Transcendenz der Zahl π.

1. Weierstrass begründet seinen Beweis für die Transcendenz der Zahl π auf einen Hilfssatz, zu dessen Herleitung ihm die Hermite'sche Untersuchung über die Zahl e den Weg angegeben hat. Direkter als er selbst es gethan hat, wollen wir hier mit unserer Betrachtung an jene Untersuchung anknüpfen, indem wir zu der Formel (24) der 6. Vorlesung zurückkehren. Wir wählen darin $x = 1$ und erhalten die Gleichung

$$\int e^{-z} \cdot F(z)\, dz = -e^{-z} \cdot \mathfrak{F}(z), \tag{1}$$

worin

$$\mathfrak{F}(z) = F(z) + F'(z) + \cdots + F^{(\mu)}(z), \tag{2}$$

μ aber der Grad der ganzen Funktion $F(z)$ ist. Nun seien

$$\begin{cases} f(z) = a_0 z^{n+1} + a_1 z^n + \cdots + a_n z + a_{n+1} \\ h(z) = c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \cdots + c_0 \end{cases} \tag{3}$$

ganze Funktionen $n + 1^{\text{ten}}$ bez. n^{ten} Grades, deren erstere lauter ungleiche Wurzeln haben soll, während die Coefficienten der letztern ganz willkürlich sind; und man wähle nun

$$F(z) = \frac{h(z) \cdot f(z)^m}{m!}. \tag{4}$$

Bei dieser Wahl findet sich

$$F'(z) = \frac{h'(z) f(z)^m}{m!} + \frac{h(z) \cdot f(z)^{m-1} \cdot f'(z)}{(m-1)!}$$

$$F''(z) = \frac{h''(z) f(z)^m}{m!} + 2\,\frac{h'(z) \cdot f(z)^{m-1} \cdot f'(z)}{(m-1)!} + \frac{h(z) \cdot f(z)^{m-2} \cdot f'(z)^2}{(m-2)!} + \frac{h(z) \cdot f(z)^{m-1} \cdot f''(z)}{(m-1)!}$$

u. s. w. Man kann demnach $\mathfrak{F}(z)$ nach den fallenden Potenzen von $f(z)$ geordnet denken, und, wenn man so

$$\mathfrak{F}(z) = \frac{H_0(z)}{m!} f(z)^m + \frac{H_1(z)}{(m-1)!} f(z)^{m-1} + \cdots + H_{m-1}(z) \cdot f(z) + H_m(z) \tag{5}$$

kürzer

$$(6) \qquad \mathfrak{F}(z) = \sum_{i=0}^{m} \frac{H_i(z)}{(m-i)!} \cdot f(z)^{m-i}$$

setzt, so sind ersichtlich die Funktionen $H_i(z)$ ganze und ganzzahlige Funktionen der Grössen z, a_0, a_1, ... a_{n+1}, c_0, c_1, ... c_n und zwar homogene lineare Funktionen der letztgenannten Coefficienten c_0, c_1, ... c_n. Aus der Grundformel (1) folgt mit Rücksicht auf (4)

$$\frac{h(z)f(z)^m}{m!} = \mathfrak{F}(z) - \mathfrak{F}'(z).$$

Wenn also die c_i nicht sämmtlich Null sind, so ist $\mathfrak{F}(z)$ eine ganze Funktion vom Grade $\mu = n + m(n+1)$, welche nicht für jeden Werth von z verschwindet; die vorige Gleichung lehrt zudem, dass $\mathfrak{F}(z)$ nicht durch $f(z)$ theilbar ist. Denn, wäre sie es im Gegentheil, und setzte man dann

$$\mathfrak{F}(z) = \varphi(z) \cdot f(z)^\varrho,$$

worin $\varphi(z)$ nun nicht mehr durch $f(z)$ theilbar gedacht wird, so fände sich nach jener Gleichung

$$\big(\varphi(z) - \varphi'(z)\big) \cdot f(z) - \varrho \cdot \varphi(z) f'(z) = \frac{h(z) \cdot f(z)^{m-\varrho+1}}{m!};$$

also müsste $\varrho \cdot \varphi(z) f'(z)$ durch $f(z)$ theilbar sein; nach der über die Wurzeln von $f(z)$ gemachten Voraussetzung hat aber $f'(z)$ keinen Theiler gemeinsam mit $f(z)$ und $\varphi(z)$ ist nicht theilbar durch $f(z)$; man kommt also auf einen Widerspruch, sobald man ϱ von Null verschieden d. h. die Funktion $\mathfrak{F}(z)$ in der That theilbar durch $f(z)$ voraussetzt; da hiernach $\mathfrak{F}(z)$ nicht durch $f(z)$ theilbar sein kann, so ist es nach (5) die Funktion $H_m(z)$ ebensowenig.

2. So oft z irgend einen der Werthe bedeutet, für welche $f(z)$ verschwindet, reducirt sich nach (5) $\mathfrak{F}(z)$ auf $H_m(z)$. Sind demnach z', z'' zwei Wurzeln der Gleichung $f(z) = 0$, und integrirt man in der Formel (1) auf irgend einem Wege zwischen den Werthen z', z'', so findet man die Gleichung

$$(7) \quad H_m(z'') \cdot e^{-z''} - H_m(z') \cdot e^{-z'} = -\int_{z'}^{z''} \frac{f(z)^m h(z)}{m!} e^{-z} dz.$$

Die obigen Ausdrücke für $F'(z)$, $F''(z)$, ... aber zeigen, dass das erste durch $f(z)$ nicht theilbare Glied von $\mathfrak{F}(z)$ aus $F^{(m)}(z)$ hervorgeht, in dessen Ausdrucke das Glied $h(z)f'(z)^m$ sich findet; $H_m(z)$ ist demnach von demselben Grade, wie dieses Glied, nämlich vom Grade $(m+1)n$; zudem erkennt man aus der Zusammensetzung der einzelnen Glieder jener Ausdrücke, dass die höchsten Coefficienten von $H_m(z)$ nach der Reihe durch a_0^m, a_0^{m-1}, ... a_0 theilbar sein müssen; daraus folgt, dass die Funktion $a_0^{m(n-1)} \cdot H_m(z)$ sich auf die Form

$$a_0^{m(n-1)} \cdot H_m(z) = G(z,m) \cdot f(z) + g(z,m) \tag{8}$$

bringen lässt, worin $G(z,m)$, $g(z,m)$ beides ganze und ganzzahlige Funktionen der Grössen z, a_0, a_1, ... a_{n+1}, c_0, c_1, ... c_n, die letztere höchstens vom Grade n in Bezug auf z bedeuten. Und damit nimmt die Gleichung (7) folgende einfachere Gestalt an:

$$\begin{aligned} &g(z'',m) \cdot e^{-z''} - g(z',m) \cdot e^{-z'} \\ &= -\int_{z'}^{z''} h(z) \frac{\left(a_0^{n-1} f(z)\right)^m}{m!} e^{-z} dz . \end{aligned} \tag{9}$$

Die Funktionen $G(z,m)$ bez. $g(z,m)$ sind, ebenso wie $H_m(z)$, homogene lineare Funktionen der Coefficienten c_i. Man kann demnach

$$G(z,m) = \sum_{i=0}^{n} c_i G_i(z,m), \quad g(z,m) = \sum_{i=0}^{n} c_i \cdot g_i(z,m) \tag{10}$$

setzen, indem man unter $G_i(z,m)$, $g_i(z,m)$ diejenigen Ausdrücke versteht, welche jene allgemeinen Funktionen annehmen, wenn $c_i = 1$, alle übrigen c gleich Null gewählt werden, d. h. wenn $h(z)$ sich auf z^i reducirt. Demnach liefert die eine Gleichung (9) folgende $n+1$ Gleichungen:

$$\begin{aligned} &g_i(z'',m) \cdot e^{-z''} - g_i(z',m) \cdot e^{-z'} \\ &= -\int_{z'}^{z''} z^i \cdot \frac{\left(a_0^{n-1} f(z)\right)^m}{m!} e^{-z} dz \end{aligned} \tag{11}$$

(für $i = 0, 1, 2 \cdots n$)

und die Gleichung (8) nimmt die Gestalt an:

$$a_0^{m(n-1)} \cdot H_m(z) = f(z) \cdot \sum_{i=0}^{n} c_i \cdot G_i(z, m) + \sum_{i=0}^{n} c_i \cdot g_i(z, m)$$

und lehrt zufolge dem zuvor bewiesenen Umstande, dass $H_m(z)$ nicht durch $f(z)$ theilbar ist, dass der Ausdruck

$$\sum_{i=0}^{n} c_i \cdot g_i(z, m) \tag{12}$$

nicht für jeden Werth von z gleich Null sein kann.

Bedeuten also $z_0, z_1, z_2, \ldots z_n$ $n+1$ ungleiche Werthe, so hat die Determinante der Grössen $g_i(z_k, m)$, nämlich:

$$\Gamma = \begin{vmatrix} g_0(z_0, m), & g_1(z_0, m), & \ldots & g_n(z_0, m) \\ g_0(z_1, m), & g_1(z_1, m), & \ldots & g_n(z_1, m) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ g_0(z_n, m), & g_1(z_n, m), & \ldots & g_n(z_n, m) \end{vmatrix} \tag{13}$$

stets einen von Null verschiedenen Werth. Denn sonst könnten die $n+1$ Gleichungen

$$\sum_{i=0}^{n} c_i \cdot g_i(z_k, m) = 0$$

$$(\text{für } k = 0, 1, 2, \cdots n)$$

mit einander bestehen, ohne dass die $n+1$ Grössen $c_0, c_1, \ldots c_n$ sämmtlich Null wären; das heisst aber: der Ausdruck (12), welcher eine ganze Funktion von z höchstens vom Grade n ist, würde für mehr als n Werthe von z und daher — zuwider dem soeben Bewiesenen — für jedes z gleich Null sein.

Diese Ergebnisse, insbesondere die Formel (11), haben Giltigkeit, wie gross die mit m bezeichnete ganze Zahl auch gedacht werde; man kann letztere aber so gross wählen, dass die rechte Seite der Gleichung (11) ihrem absoluten Betrage nach beliebig klein wird. In der That, wenn der beliebige Integrationsweg jetzt als ein endlicher und seine Länge gleich l vorgestellt wird, so heisse M der grösste absolute Betrag, welchen $z^i e^{-z}$ längs des Integrationsweges annimmt, M' das Maximum des absoluten Betrages von $a_0^{n-1} f(z)$ längs desselben. Dann ist — ähnlich wie in No. 6 der vor. Vorlesung — der

absolute Betrag des Integrales kleiner als $M \cdot \frac{M'^m}{m!} \cdot l$ und sinkt mit wachsendem m zugleich mit dem zweiten Faktor dieses Produkts unter jeden Grad von Kleinheit herab. Also convergirt auch die linke Seite der Gleichung (11), oder auch, nachdem sie mit $e^{z'+z''}$ multiplicirt ist, der Ausdruck

$$(14) \qquad g_i(z', m) \cdot e^{z''} - g_i(z'', m) \cdot e^{z'}$$

bei unendlich wachsendem m gegen Null.

3. Wir verstehen nunmehr unter $z_0, z_1, \ldots z_n$ sämmtliche Wurzeln der Gleichung $f(z) = 0$, die wir als ungleich bereits vorausgesetzt hatten, und nehmen ausserdem jetzt an, dass die Coefficienten in dieser Gleichung ganze Zahlen sind. Entsprechend werden dann, dem oben schon Gesagten gemäss, auch die Coefficienten der Funktionen $g_i(z, m)$ sämmtlich ganzzahlig sein. Nach der vorigen Nummer ist ferner die Determinante Γ von Null verschieden und m kann so gross gewählt werden, dass jede der Grössen

$$g_i(z_0, m) \cdot e^{z_k} - g_i(z_k, m) \cdot e^{z_0}$$
$$(\text{für } i, k = 0, 1, 2 \cdots n)$$

ihrem absoluten Betrage nach kleiner ist, als eine beliebig klein angenommene positive Zahl δ.

Hiermit ist der Hilfssatz von Weierstrass bewiesen und kann folgendermassen ausgesprochen werden:

Es sei $f(z)$ eine ganze und ganzzahlige Funktion $n+1^{\text{ten}}$ Grades von z mit den von einander verschiedenen Wurzeln $z_0, z_1, z_2, \ldots z_n$, so giebt es ein System

$$g_0(z), g_1(z), \ldots g_n(z)$$

von $n+1$ ganzen und ganzzahligen Funktionen von z, höchstens vom Grade n, so beschaffen, dass die Determinante der Grössen $g_i(z_k)$ von Null verschieden und jede der Differenzen

$$g_i(z_0) \cdot e^{z_k} - g_i(z_k) \cdot e^{z_0}$$
$$(\text{für } i, k = 0, 1, 2, \cdots n)$$

ihrem absoluten Betrage nach kleiner ist, als eine beliebig klein angenommene positive Zahl δ.

4. Auf Grund dieses Satzes lässt sich nun der Nachweis für die Transcendenz der Zahl π folgendermassen erbringen.

Bekanntlich hat die Gleichung $e^x + 1 = 0$ keine andern Lösungen, als die durch die Formel

$$x = (2n + 1)\pi i \tag{15}$$

gegebenen Werthe von x. Lässt sich demnach zeigen, dass der Ausdruck $e^x + 1$ einen von Null verschiedenen Werth hat, sobald x eine *algebraische* Zahl ist, so folgt sogleich, dass jeder durch die Formel (15) gegebene Werth und damit auch die Zahl π eine nicht algebraische Zahl sein muss. Alles läuft also darauf hinaus, jenen Nachweis zu führen.

Es bedeute zu diesem Zwecke

$$x^r + C_1 x^{r-1} + C_2 x^{r-2} + \cdots + C_r = 0 \tag{16}$$

eine beliebige Gleichung mit rationalen Coefficienten und von einem Grade $r \gtrless 2$; ihre Wurzeln, welche, ohne die Allgemeinheit zu beschränken, als ungleich vorausgesetzt werden dürfen, seien $x_1, x_2, x_3, \ldots x_r$. Betrachten wir das Produkt

$$\prod_{h=1}^{r} (e^{x_h} + 1) = (e^{x_1} + 1)(e^{x_2} + 1) \cdots (e^{x_r} + 1)$$

und daneben das gleichgebildete Produkt

$$\prod_{h=1}^{r} (e^{\xi_h} + 1) = (e^{\xi_1} + 1)(e^{\xi_2} + 1) \cdots (e^{\xi_r} + 1),$$

in welchem $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_r$ beliebige Unbestimmte bezeichnen. Das allgemeine Glied des entwickelten Produktes kann man schreiben:

$$e^{\varepsilon_1 \xi_1 + \varepsilon_2 \xi_2 + \cdots + \varepsilon_r \xi_r},$$

wo die ε_i entweder 0 oder 1 sind, und man erhält offenbar alle Glieder, wenn man für die ε_i alle möglichen Combinationen dieser zwei Werthe allmählich einsetzt, sodass man setzen kann:

$$\prod_{h=1}^{r} (e^{\xi_h} + 1) = \sum e^{\varepsilon_1 \xi_1 + \varepsilon_2 \xi_2 + \cdots + \varepsilon_r \xi_r},$$

wo die r-fache Summation sich eben auf alle diese Combinationen erstreckt, also $p = 2^r$ Summanden vorhanden sein werden. Die Exponenten in dieser Summe, in irgend einer Anordnung genommen, seien $\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_{p-1}$, sodass

$$\prod_{h=1}^{r}(e^{\xi_h}+1) = \sum_{k=0}^{p-1} e^{\zeta_k}. \tag{17}$$

Sind $z_0, z_1, z_2, \ldots z_{p-1}$ die Werthe, welche $\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_{p-1}$ dadurch annehmen, dass man den Unbestimmten $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_r$ die bestimmten Werthe $x_1, x_2, \ldots x_r$ beilegt, so ergiebt sich aus (17) sogleich auch

$$\prod_{h=1}^{r}(e^{x_h}+1) = \sum_{k=0}^{p-1} e^{z_k}. \tag{18}$$

Die Anzahl der von einander verschiedenen Werthe, welche in der Reihe $z_0, z_1, z_2, \ldots z_{p-1}$ vorhanden sind, sei $n+1$; da unter diesen Werthen, indem man alle ε_i bis auf eins, das gleich 1 ist, gleich 0 wählt, auch die Wurzeln $x_1, x_2, \ldots x_r$ gefunden werden, ist $n+1$ sicher grösser als 1; die Ausdrücke $\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_{p-1}$ können dabei so geordnet gedacht werden, dass die Grössen $z_0, z_1, z_2, \ldots z_n$ die unter einander verschiedenen z_i darstellen und $z_0 = 0$ ist. Dies vorausgesetzt, lässt sich nun eine ganze und ganzzahlige Funktion $f(z)$ vom Grade $n+1$ angeben, welche diese $n+1$ Werthe $z_0, z_1, z_2, \ldots z_n$ zu Wurzeln hat.

Betrachtet man nämlich das Produkt

$$\prod_{k=0}^{p-1}(z-\zeta_k) = \prod(z-\varepsilon_1\xi_1-\varepsilon_2\xi_2-\cdots-\varepsilon_r\xi_r),$$

das letztere über alle p Combinationen erstreckt, welche den Werthen $\varepsilon_i = 0, 1$ entsprechen, so ist dasselbe offenbar eine ganze und ganzzahlige Funktion der Grössen $z, \xi_1, \xi_2, \ldots \xi_r$, welche in Bezug auf die ξ_i symmetrisch ist. Erhalten also die Unbestimmten ξ_i jetzt die Bedeutung als Wurzeln x_i der Gleichung (16), so wird das Produkt

$$\prod_{k=0}^{p-1}(z-z_k)$$

eine ganze Funktion von z sein, deren Coefficienten ganze und ganzzahlige symmetrische Funktionen von diesen Wurzeln und folglich ganze und ganzzahlige Funktionen von den Coefficienten der algebraischen Gleichung sind; haben diese rationale Werthe, wie wir es von der Gleichung (16) vorausgesetzt haben, so wird demnach jenes Produkt eine ganze Funktion von z sein mit gleichfalls rationalen Coefficienten. Wir denken uns diese ganze Funktion — sie heisse $\psi(z)$ — durch den grössten gemeinsamen Theiler dividirt, den sie mit ihrer ersten Abgeleiteten $\psi'(z)$ gemeinsam hat; der Quotient hat bekanntlich gleichfalls rationale Coefficienten, aber nur noch die von einander verschiedenen z_k, d. h. die Werthe $z_0, z_1, z_2, \ldots z_n$ zu Wurzeln; mit dem Generalnenner der rationalen Coefficienten multiplicirt wird er also eine ganze Funktion $f(z)$ $n+1^{\text{ten}}$ Grades mit ganzzahligen Coefficienten sein, welche jene Werthe zu Wurzeln hat, eine Funktion also, wie sie nachgewiesen werden sollte.

5. Nunmehr findet der Hilfssatz von Weierstrass seine Verwendung. Denn in Anwendung auf die soeben festgestellte Funktion $f(z)$ ergiebt er das Vorhandensein von $n+1$ ganzen Funktionen $g_0(z), g_1(z), \ldots g_n(z)$ von der im Hilfssatze angegebenen Beschaffenheit, der Art insbesondere, dass, wenn δ ein beliebig kleiner positiver Werth ist, die sämmtlichen Ausdrücke

$$g_i(0) \cdot e^{z_k} - g_i(z_k)$$

ihrem absoluten Betrage nach kleiner als δ sind, oder, was dasselbe sagt, dass

$$g_i(0) \cdot e^{z_k} - g_i(z_k) = \varepsilon_{i,k} \cdot \delta$$

gesetzt werden kann, während die absoluten Beträge von $\varepsilon_{i,k}$ sämmtlich kleiner als 1 sind, die Determinante der Grössen $g_i(z_k)$ aber von Null verschieden ist. Wir wollen sogleich δ so klein gewählt denken, dass $p \cdot a_0^n \cdot \delta < 1$ ist. In der vorstehenden Gleichung erhält zwar k mit Bezug auf den Hilfssatz nur die Werthe 0, 1, 2, ... n, welche auch i erhält; aber, da die übrigen z_i der Reihe $z_0, z_1, z_2, \ldots z_{p-1}$ keine andern Werthe als einen der Reihe $z_0, z_1, \ldots z_n$ darstellen, so darf man k die ganze Reihe 0, 1, 2, ... $p-1$ durchlaufen lassen.

So findet man durch Summation aus jener Gleichung zunächst die andere:

$$a_0^n g_i(0) \cdot \sum_{k=0}^{p-1} e^{z_k} = \sum_{k=0}^{p-1} a_0^n g_i(z_k) + \delta \cdot a_0^n \cdot \sum_{k=0}^{p-1} \varepsilon_{i,k}$$

oder, da der absolute Betrag der letztern Summe nicht grösser als p sein kann, diese folgende:

$$(19) \qquad a_0^n g_i(0) \cdot \sum_{k=0}^{p-1} e^{z_k} = \sum_{k=0}^{p-1} a_0^n g_i(z_k) + \eta_i,$$

(für $i = 0, 1, 2 \cdots n$)

worin der absolute Betrag von η_i kleiner als 1 ist.

Zur besseren Erkenntniss der Natur der Summe auf der Rechten dieser Gleichung betrachten wir zunächst die ähnliche Summe

$$\sum_{k=0}^{p-1} a_0^n \cdot g_i(\xi_k) = \sum a_0^n \cdot g_i(\varepsilon_0 \xi_0 + \varepsilon_1 \xi_1 + \cdots + \varepsilon_r \xi_r),$$

letztere Summe über alle Combinationen der Werthe $\varepsilon_i = 0, 1$ erstreckt. Da g_i eine ganze und ganzzahlige Funktion bedeutet, ist auch diese Summe eine ganze und ganzzahlige Funktion der Grössen $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_r$, aber in Beziehung auf dieselben offenbar auch symmetrisch; demnach ist

$$(20) \qquad \sum_{k=0}^{p-1} a_0^n \cdot g_i(z_k)$$

eine ganze und ganzzahlige symmetrische Funktion der Grössen $x_1, x_2, \ldots x_r$ d. h. der Wurzeln von (16), also eine ganze und ganzzahlige Funktion der Coefficienten dieser Gleichung und daher jedenfalls eine rationale Zahl. Andererseits ist g_i eine ganze und ganzzahlige Funktion höchstens vom n^{ten} Grade, und demnach hat $a_0^n g_i(z_k)$ die allgemeine Gestalt

$$A_0 (a_0 z_k)^n + A_1 (a_0 z_k)^{n-1} + \cdots + A_{n-1} \cdot a_0 z_k + A_n,$$

worin die A_i ganze Zahlen sind. Da nun z_k als Wurzel der Gleichung $f(z) = 0$ eine ganze algebraische Zahl ist, so ist's auch $a_0 z_k$ und — nach dem Zusatze in No. 2 der 2. Vorlesung — auch der vorstehende Ausdruck und folglich auch

die ganze Summe (20). Eine ganze algebraische Zahl aber, welche rational ist, ist (s. Vorlesung 1 No. 2) sogar eine ganze Zahl, und so gewinnen wir, alles in allem, das Ergebniss: die Summe (20) ist gleich einer gewöhnlichen *ganzen* Zahl.

Aber diese ganze Zahl kann nicht für *jeden* der Werthe $i = 0, 1, 2, \ldots n$ gleich Null sein. Denn, indem man in der Summe (20) diejenigen Glieder zusammennimmt, in denen z_k denselben Werth hat, kann sie gesetzt werden gleich:

$$\sum_{k=0}^{n} N_k \cdot g_i(z_k),$$

(für $i = 0, 1, 2, \cdots n$)

worin nun die N_k sämmtlich positive ganze Zahlen bedeuten; und diese $n + 1$ Ausdrücke können nicht sämmtlich verschwinden, da es sonst auch ihre Determinante, nämlich die Determinante Γ, müsste, dem Hilfssatze von Weierstrass zuwider.

Es giebt also sicher wenigstens einen Werth von i, für welchen in (19) das erste Glied rechts eine von Null verschiedene ganze Zahl und demnach die ganze rechte Seite nicht Null ist. Für diesen Werth von i wird dann auch die linke Seite d. h. nach (18) das Produkt

$$a_0^n g_i(0) \cdot \prod_{h=1}^{r} (e^{x_h} + 1)$$

von Null verschieden sein, und demnach kann keiner der Faktoren $e^{x_h} + 1$ gleich Null sein, d. h. $e^x + 1$ ist stets von Null verschieden, wenn x eine algebraische Zahl ist; denn x_h, als Wurzel der Gleichung (16) vorausgesetzt, bedeutet jede beliebige algebraische Zahl. In der That, die scheinbare Beschränkung, der wir die Gleichung (16) unterwarfen, indem wir ihren Grad mindestens gleich 2 voraussetzten, hindert nicht, jenen Satz auszusprechen; wäre nämlich x Wurzel einer Gleichung ersten Grades mit rationalen Coefficienten, so wär's selbst eine rationale Zahl; e^x aber ist für ein rationales x stets positiv und demnach kann auch in diesem Falle $e^x + 1$ nicht Null sein.

6. So ist — wie man sieht, durch Betrachtungen von verhältnissmässiger Einfachheit — die wichtige Erkenntniss strenge begründet, dass die Zahl π eine nicht algebraische Zahl ist. Zugleich hiermit ist nun aber eine Frage endlich auf entscheidende Weise beantwortet, über eine Aufgabe endgiltig entschieden worden, welche viele Jahrhunderte lang eine offene gewesen ist und hundertfältige Versuche der Lösung veranlasst hat. Freilich entsprangen diese letztern zum grossen Theile der missverstehenden Auffassung Unberufener. Es handelt sich um das weltberühmte Problem von der Quadratur des Kreises d. i. um die Aufgabe: ein Quadrat zu bestimmen, dessen Inhalt gleich demjenigen eines gegebenen Kreises ist. Ein Kreis aber ist nach seiner Grösse gegeben, wenn sein Radius gegeben wird; und die Aufgabe, richtig verstanden, würde verlangen: es soll eine Construktion gefunden werden, welche aus dem gegebenen Kreisradius die Seite jenes Quadrates ermittelt. Die alte Geometrie, welche zuerst diese Aufgabe sich stellte, kannte keine andern Hilfsmittel der geometrischen Construktion, als den Zirkel und das Lineal, d. h., richtiger gesagt, Kreislinie und Gerade. Und so würde das Problem von der Quadratur des Kreises, noch genauer ausgesprochen, folgendermassen zu fassen sein: Aus dem gegebenen Kreisradius — welcher dabei als Längeneinheit gewählt werden darf — soll durch eine geometrische Construktion, bei welcher nur Gerade und Kreislinien zur Verwendung kommen, die Seite eines Quadrates gefunden werden, dessen Inhalt demjenigen des Kreises gleich ist.

Die Versuche der Mathematiker, diese Aufgabe zu lösen, haben sich nun allezeit als vergeblich erwiesen; obwohl die mathematische Wissenschaft nach verschiedensten Seiten hin die ausserordentlichsten Fortschritte machte, brachten doch diese Fortschritte, auch der geometrischen Disciplinen, nicht den geringsten Gesichtspunkt herbei, unter welchem die Lösung der Aufgabe zu erhoffen war, und so waren die Mathematiker seit lange von der Unmöglichkeit derselben überzeugt und hatten sich darein gefunden, eine Entscheidung darüber dem stetigen Entwicklungsgange der Wissenschaft zu über-

lassen. Denn mehr als einmal ist es geschehen, dass durch den letztern zwischen Problemen, welche ganz verschiedenen Gebieten der Mathematik angehören, eine unerwartete Beziehung aufgedeckt worden ist und dann eine Aufgabe, welche mit den Hilfsmitteln der einen Disciplin nicht gelöst werden konnte, in einer andern ihre Erledigung fand. Mancher freilich, der ausserhalb der Wissenschaft stand, glaubte sich befähigt, die Frage mit den Kenntnissen, die er von der Schule her gerettet, angreifen und lösen zu können, wobei es mit der mathematischen Strenge der Lösung oft genug nicht genau genommen und, wie Kummer einmal es ausgedrückt hat, allerlei Mittel angewandt wurden, nur dasjenige nicht, was in der Mathematik einzig zum Ziele führt, der Verstand. Die Akademien, welche mit der Prüfung solcher Lösungen bemüht wurden, sahen sich schliesslich zu dem Beschlusse genöthigt, gegenüber jedem neuen Versuche dieser Art sich ablehnend zu verhalten. Wie richtig die Wissenschaft gethan, sich eine Zeit lang zu bescheiden, zeigt nun die jetzt gewonnene Entscheidung; in der That: wieder nicht durch gewaltsame Versuche in der nächstliegenden Wissenschaft, der Geometrie, sondern aus einer ganz anderen Quelle, die erst mit den Fortschritten einer viel jüngeren Disciplin, der Algebra, eröffnet worden ist, wurde es möglich, die Erkenntniss zu gewinnen, dass die Quadratur des Kreises eine Unmöglichkeit, nämlich die genannte Aufgabe unlösbar ist.

Man kann die geometrische Fassung unserer Aufgabe in der That leicht durch eine algebraische ersetzen, wenn man sich erinnert, dass die Construktion von geradlinigen Strecken mittels Geraden und Kreislinien im wesentlichen nur auf eine der beiden Aufgaben zurückkommt: 1) zu drei gegebenen Strecken die vierte Proportionale, 2) zu zwei gegebenen Strecken die mittlere Proportionale zu finden; d. h. arithmetisch aufgefasst: eine Grösse x durch die Gleichung $\frac{x}{a} = \frac{b}{c}$ bez. durch die Gleichung $\frac{x}{a} = \frac{b}{x}$ oder $x^2 = ab$ zu ermitteln. Dies sind algebraische Gleichungen ersten bez. zweiten Grades. Wenn demnach eine gewisse Strecke aus einer oder mehreren gegebenen Strecken, z. B. die Quadratseite aus dem gegebenen

Kreisradius, mittels Zirkel und Lineal d. h. durch eine gewisse Reihe von Construktionen der genannten beiden Arten construirbar sein soll, so muss ihre Grösse ermittelt werden können, indem man eine entsprechende Reihe von algebraischen Gleichungen der angegebenen Art löst und verknüpft. Die gesuchte Grösse entsteht mit andern Worten aus der Gegebenen mittels einer Reihenfolge rationaler Operationen und Wurzelausziehungen, sodass, wie leicht einzusehen ist, eine gewisse algebraische Gleichung hergestellt werden kann, welcher sie genügt. Ihr Werth wäre demnach — mit Benutzung des von uns eingeführten Ausdrucks — eine algebraische Zahl. Ist nun aber die Seite jenes Quadrates eine solche, so ist's auch der Inhalt des Quadrates, welcher, wenn er dem Inhalte des Kreises vom Radius r gleich sein soll, bekanntlich durch πr^2 oder, falls wir den Kreisradius zur Längeneinheit wählen, durch die Zahl π gemessen wird. Diese müsste also, wäre die Quadratur des Kreises möglich, eine algebraische Zahl sein; da wir sie als eine nicht algebraische erkannt haben, ist die Quadratur des Kreises unmöglich.

So ist es das rühmliche Verdienst des Herrn Lindemann, indem er uns die an sich höchst interessante Erkenntniss vermittelte von der eigentlichen Natur der Zahl π, zugleich eins der berühmtesten Probleme der Mathematik endgiltig, wenn auch in negativem Sinne, erledigt zu haben; und dies Verdienst wird auf keine Weise durch die grössere Einfachheit geschmälert, welche dem späteren Beweise von Weierstrass vor dem seinigen den Vorzug giebt. Aber freilich darf man nicht vergessen, wie ihm durch die geistvolle Untersuchung des Herrn Ch. Hermite über die Zahl e die principielle Grundlage schon gegeben war, auf der er nur weiterzubauen brauchte und die allein den Erfolg seiner Bemühungen ermöglichte.

7. Die Abhandlung von Weierstrass enthält nun auch noch den Beweis einiger allgemeineren Sätze, welche Lindemann gleichfalls schon ausgesprochen, aber ohne ausgeführten Beweis gelassen hat. Wir wollen uns, indem wir in dieser Hinsicht auf die Abhandlung selbst verweisen, damit begnügen, nur diese Sätze selbst hier anzufügen.

Sind $x_1, x_2, \ldots x_r$ die als verschieden vorausgesetzten Wurzeln einer Gleichung

$$x^r + C_1 x^{r-1} + \cdots + C_r = 0$$

mit rationalen Coefficienten, $N_1, N_2, \ldots N_r$ aber ganze (oder auch nur rationale) Zahlen, unter denen wenigstens eine nicht Null ist, so ist die Gleichheit

$$\sum_{i=1}^{r} N_i e^{x_i} = 0$$

unmöglich. Dieser Satz enthält in sich die von Hermite bezüglich der Zahl e gewonnene Erkenntniss; denn er besagt, wenn man für $x_1, x_2, \ldots x_r$ irgend r von einander verschiedene ganze Zahlen wählt, dass e keine algebraische Zahl sein kann. Er lässt zudem leicht eine Verallgemeinerung zu, indem man unter $x_1, x_2, \ldots x_r$ irgend r von einander verschiedene algebraische Zahlen verstehen darf.

Endlich aber lässt der Satz noch eine Erweiterung zu und verwandelt sich so in den nachstehenden, welcher alle die vorigen umfasst:

Allgemeinster Satz: Bedeuten $x_1, x_2, \ldots x_r$ irgend r von einander *verschiedene*, $X_1, X_2, \ldots X_r$ aber *beliebige* algebraische Zahlen, von deren letztern eine wenigstens von Null verschieden ist, so ist die Gleichung

$$\sum_{i=1}^{r} X_i e^{x_i} = 0 \tag{21}$$

unmöglich.

Wählt man z. B. $r = 2$, $X_1 = -1$, $x_2 = 0$ und ersetzt x_1, X_2 durch die Zeichen x, X, so nimmt vorstehende Gleichung die Form an

$$e^x = X. \tag{22}$$

Dem allgemeinen Satze gemäss kann diese nicht bestehen, wenn x, X gleichzeitig algebraische Zahlen und x von $x_2 = 0$ verschieden ist. Demnach findet der besondere Satz statt:

Die Exponentialgrösse e^x ist stets eine transcendente Zahl, wenn x eine von Null verschiedene algebraische Zahl ist.

Da x in der Gleichung (22) der natürliche Logarithmus von X ist und dem Werthe $x = 0$ der Werth $X = 1$ entsprechen würde, folgt aus (21) gleichermassen auch folgender zugehörige zweite Satz:

Der natürliche Logarithmus einer algebraischen Zahl X ist immer eine transcendente Zahl, wenn X nicht den Werth 1 hat.

Zehnte Vorlesung.

Ueber die kubischen Irrationellen.

1. Während wir in den voraufgehenden Vorlesungen von Untersuchungen berichten konnten, welche ihren endgiltigen Abschluss bereits gefunden haben, wollen wir nun zum Schlusse noch eine Frage berühren, die noch vieler eingehender Untersuchungen bedürfen wird, bevor sie in einer ähnlich befriedigenden Weise beantwortet sein wird. In der vierten Vorlesung haben wir für die quadratischen Irrationellen ein ihnen durchaus eigenthümliches arithmetisches Kennzeichen hergeleitet, darin bestehend, dass sie und nur sie allein in einen periodischen Kettenbruch der dort näher angegebenen Art entwickelt werden können. Es ist auch bereits daran die Frage geknüpft worden, ob für die Irrationellen höheren Grades ein ähnliches arithmetisches Kennzeichen vorhanden sei und worin es bestehe.

Wie wichtig und interessant der Nachweis eines solchen sein würde und welch reiches Feld der Forschung sich hier eröffnet, ist kaum nöthig besonders hervorzuheben; es sei aber erlaubt, eine Stelle aus Hermite's zahlentheoretischen, an Jacobi gerichteten Briefen*) ausführlich hier beizubringen, welche sehr anregend über diese Frage sich äussert. Sie findet

---

*) Extrait de lettres de M. Ch. Hermite à M. Jacobi sur différents objets de la théorie des nombres.

sich in Crelle's Journal Bd. 40 pag. 286 und lautet folgendermassen: Mais permettez-moi, Monsieur, de revenir un instant sur les circonstances remarquables, auxquelles donne lieu la réduction des formes dont les coefficiens dépendent de racines d'équations algébriques à coefficiens entiers. Peut-être parviendra-t'-on à déduire de là un système complet de caractères pour chaque espèce de ce genre de quantités, analogue par exemple à ceux que donne la théorie des fractions continues pour les racines des équations du second degré. On ne peut du moins faire concourir trop d'éléments pour jeter quelque lumière sur cette variété infinie des irrationnelles algébriques, dont les symboles d'extraction de racines ne nous représentent que la plus faible partie. Ici comme dans la théorie des transcendentes il a été facile de trouver à une longue suite de notions analytiques de plus en plus complexes une origine commune, une définition unique et complète, où n'entrent que les premiers éléments du calcul; mais quelle tâche immense, pour la théorie des nombres et le calcul intégral, de pénétrer dans la nature d'une telle multiplicité d'êtres de raison, en les classant en groupes irréductibles entre eux, de les constituer tous individuellement par des définitions caractéristiques et élémentaires?

Wie man sieht, giebt Hermite in dieser Stelle auch einen Fingerzeig, auf welcher Grundlage etwa die Lösung der Aufgabe zu suchen sei, nämlich vermittelst der „Reduktion der sogenannten zahlentheoretischen Formen". In der That, nachdem durch Lagrange, wie wir in der vierten Vorlesung gesehen, der innige Zusammenhang der Frage bezüglich der quadratischen Irrationellen mit der Theorie der quadratischen Formen aufgedeckt worden ist, lag die Vermuthung sehr nahe, dass zwischen dem Verhalten höherer Irrationellen und der Theorie der höheren Formen eine analoge Beziehung bestehe. Und Hermite hat aus dieser Erwägung eine Reihe von Untersuchungen begonnen und in seinen Briefen auseinandergesetzt, welche hauptsächlich zunächst dahin zielen, geeignete Definitionen der „reducirten Formen" höherer Art zu liefern und nachzuweisen, dass bei der Berechnung derselben aus einer ursprünglich gegebenen Form eine gewisse Periodicität sich herausstellen müsse. Einer seiner Schüler, Herr

Charve*), hat in einer ausführlichen Arbeit über ternäre quadratische Formen, welcher er diejenige Auffassung reducirter Formen zu Grunde legt, die man Selling**) verdankt, die Hermite'schen Gedanken entwickelt und bestätigt, indem er die arithmetische Operation der Reduktion einer Form zugleich geometrisch veranschaulicht; theils theoretisch, theils an einer Reihe numerischer Beispiele findet er eine Periodicität in der Reihe der Substitutionen, welche die reducirten Formen aus der ursprünglich gegebenen Form herzuleiten geeignet sind.

Andererseits hat Jacobi auf dem vorliegenden unerforschten Gebiete einen wichtigen Schritt voran gethan, der gewiss die richtige Fährte verfolgt. In einer Abhandlung, welche erst nach seinem Tode veröffentlicht worden ist***), entwickelt er einen Algorithmus, der als eine sehr nahe liegende Verallgemeinerung desjenigen anzusehen ist, auf welchen wir in der 3. und 4. Vorlesung die Kettenbrüche und ihre Periodicität im Falle der quadratischen Irrationellen begründet haben und welchen er deshalb auch einen Kettenbruchalgorithmus nennt; und indem er denselben zur Anwendung bringt auf die Kubikwurzel aus einer ganzen Zahl, findet er an verschiedenen numerischen Beispielen die Vermuthung bestätigt, dass der Algorithmus periodisch sei. Die sehr interessante Frage, ob diese Eigenschaft der Kubikwurzel allgemein und derselben bez. den Irrationellen dritten Grades charakteristisch sei, blieb leider einstweilen ungelöst; denn, obwohl sie nach den Ergebnissen von Hermite und Charve unzweifelhaft bejahend zu beantworten sein dürfte, können doch die genannten Untersuchungen nicht als entscheidend dafür gelten, solange zwischen ihnen und dem Kettenbruchalgorithmus nicht ein fester Zusammenhang nachgewiesen worden ist.

*) Thèses près. à la faculté des Sciences de Paris: de la réduction des formes quadratiques ternaires positives et de leur application aux irrationnelles du troisième degré.

**) Journal f. d. r. u. a. M. Bd. 77.

***) Jacobi, allgem. Theorie der kettenbruchähnlichen Algorithmen, in welchen jede Zahl aus drei vorhergehenden gebildet wird; herausg. von Heine, Journ. f. d. r. u. a. Math. Bd. 69 pag. 29.

Auch eine Arbeit von Fürstenau (über Kettenbrüche höherer Ordnung, im Jahresberichte über das Königl. Realgymnasium zu Wiesbaden 1874) giebt diese Lösung nicht. Ihm gebührt zwar das Verdienst, analytische Ausdrücke, die sogenannten Kettenbrüche höherer, insbesondere zweiter Ordnung aufgefunden zu haben, welche den Jacobi'schen Algorithmen genau so entsprechen, wie dem von uns in der 3. Vorlesung zu Grunde gelegten Algorithmus die gewöhnlichen Kettenbrüche; ob er so zugleich an Stelle jenes Kettenbruchalgorithmus etwas Uebersichtlicheres gesetzt hat, das vor ihm den Vorzug verdiene, muss ich in Frage stellen; mir wenigstens scheint den Rekursionsformeln von Jacobi, aus denen aufs Einfachste alle Folgerungen sich herleiten, vor den sehr weitschichtigen Ausdrücken von Fürstenau der Vorrang zuzukommen. Jedenfalls gelingt es Fürstenau nur, den nicht schwierigen Nachweis zu führen, dass, wenn der Kettenbruch zweiter Ordnung, welcher einer Grösse x gleich ist, ein periodischer ist, x Wurzel einer kubischen Gleichung mit ganzzahligen Coefficienten sein muss; die Umkehrung aber, welche eigentlich das Wesentlichere der Frage ist, bleibt gänzlich unerörtert. Wir wollen im Folgenden das Ergebniss von Fürstenau bestätigen, indem wir aber formell an dem Kettenbruchalgorithmus von Jacobi selbst festhalten.

Ausserdem aber hat der Verfasser dieses Buches den Versuch gemacht*), jene Umkehrung, d. i. die von Jacobi an einzelnen Beispielen bemerkte Thatsache als allgemein giltig zu beweisen. Er glaubte dies Ziel dadurch erreichen zu können, dass er die in der vierten Vorlesung dargestellte Untersuchung von Lagrange in ganz analoger Weise auf den hier vorliegenden Fall, nämlich auf gewisse ternäre kubische Formen übertrug. Wenn ihm freilich bisher der gesuchte Nachweis so noch nicht gelungen ist, so dürften doch, bis Vollkommeneres gewonnen worden ist, die Ergebnisse dieser Untersuchung des Interesses namentlich deshalb nicht entbehren, weil sie aufs deutlichste zeigen, dass die Jacobi'schen Algorithmen mit den obgenannten Hermite'schen Gesichts-

*) Journ. f. d. r. u. a. Math. Bd. 75, pag. 25.

punkten in der That in Verbindung sein müssen; und so sollen sie als einstweiliger Abschluss der Untersuchungen über die Natur der algebraischen Irrationellen zum Schlusse noch dargestellt werden.

2. Um zunächst den Jacobi'schen Kettenbruchalgorithmus seinem Wesen nach zu bezeichnen, führen wir drei Unbestimmte a_0, a_1, a_2 ein und leiten aus ihnen durch die Beziehungen:

$$(1)\qquad \begin{cases} a_0 + l_0 a_1 \quad + m_0 a_2 \quad = a_3 \\ a_1 + l_1 a_2 \quad + m_1 a_3 \quad = a_4 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_i + l_i a_{i+1} + m_i a_{i+2} = a_{i+3}, \end{cases}$$

in welchen

$$(2)\qquad l_0, l_1, l_2, \ldots, \quad m_0, m_1, m_2, \ldots$$

beliebig gegebene Grössen bedeuten, andere Grössen a_3, a_4, ... in beliebiger Menge her. Vermittelst dieser Beziehungen ist schon a_3 durch a_0, a_1, a_2 linear ausgedrückt; wird sein Werth in die zweite Gleichung eingesetzt, so wird es auch a_4, und wenn a_3 und a_4 in die folgende Gleichung eingesetzt werden, auch a_5 u. s. w., sodass man schliesslich drei Gleichungen folgender Gestalt erhalten wird:

$$(3)\qquad \begin{cases} a_i \quad = P_i a_0 \quad + P_i' a_1 \quad + P_i'' a_2 \\ a_{i+1} = P_{i+1} a_0 + P_{i+1}' a_1 + P_{i+1}'' a_2 \\ a_{i+2} = P_{i+2} a_0 + P_{i+2}' a_1 + P_{i+2}'' a_2; \end{cases}$$

die Coefficienten P, P', P'' werden dabei sämmtlich positive ganze Zahlen sein, wenn wir dies, wie es von vornherein geschehen soll, von den Zahlen (2) voraussetzen; denn sie entstehen dann aus diesen positiven ganzen Zahlen, indem mit denselben nur Additionen und Multiplikationen zur Ausführung gebracht werden. In diesen Gleichungen ist der Sache nach $i \gtreqless 3$ vorausgesetzt, d. h. sie geben die Werthe der Zahlen a_3, a_4, a_5, ...; jedoch liefern sie offenbar auch die Zahlen a_0, a_1, a_2, gelten also für jeden Index i, wenn folgende Werthe festgesetzt werden:

$$(4)\qquad \begin{cases} P_0 = 1, & P_0' = 0, & P_0'' = 0 \\ P_1 = 0, & P_1' = 1, & P_1'' = 0 \\ P_2 = 0, & P_2' = 0, & P_2'' = 1. \end{cases}$$

So liefert dann die letzte der Gleichungen (3), wenn i in $i+1$ verwandelt wird, für jeden Werth des Index i die folgende:

$$a_{i+3} = P_{i+3}\,a_0 + P_{i+3}'\,a_1 + P_{i+3}''\,a_2;$$

andererseits findet man, wenn in die letzte der Gleichungen (1) die Werthe (3) eingesetzt werden,

$$\begin{aligned} a_{i+3} = {} & (P_i + l_i P_{i+1} + m_i P_{i+2})\,a_0 \\ & + (P_i' + l_i P_{i+1}' + m_i P_{i+2}')\,a_1 \\ & + (P_i'' + l_i P_{i+1}'' + m_i P_{i+2}'')\,a_2. \end{aligned}$$

Dieser Werth muss also dem vorigen gleich sein und ergiebt wegen der Unbestimmtheit der Grössen a_0, a_1, a_2 folgende drei Beziehungen zwischen den aufeinanderfolgenden P_i, P_i', P_i'':

$$(5)\qquad \begin{cases} P_i + l_i P_{i+1} + m_i P_{i+2} = P_{i+3} \\ P_i' + l_i P_{i+1}' + m_i P_{i+2}' = P_{i+3}' \\ P_i'' + l_i P_{i+1}'' + m_i P_{i+2}'' = P_{i+3}''. \end{cases}$$

Wird demnach die Determinante der Gleichungen (3) mit Π bezeichnet,

$$\Pi = \begin{vmatrix} P_i, & P_i', & P_i'' \\ P_{i+1}, & P_{i+1}', & P_{i+1}'' \\ P_{i+2}, & P_{i+2}', & P_{i+2}'' \end{vmatrix},$$

so lässt sich mit Rücksicht auf die vorstehenden Beziehungen nach bekannten einfachen Determinantensätzen dieselbe auch so schreiben:

$$\Pi = \begin{vmatrix} P_{i+1}, & P_{i+1}', & P_{i+1}'' \\ P_{i+2}, & P_{i+2}', & P_{i+2}'' \\ P_{i+3}, & P_{i+3}', & P_{i+3}'' \end{vmatrix},$$

d. h. sie ändert sich nicht, wenn der Index i um eine Einheit vermehrt oder vermindert wird, und ist demnach schliesslich gleich der Determinante

$$\begin{vmatrix} P_0, & P_0', & P_0'' \\ P_1, & P_1', & P_1'' \\ P_2, & P_2', & P_2'' \end{vmatrix},$$

welche den unter (4) festgesetzten Werthen ihrer Elemente zufolge gleich 1 ist. Man hat also die Gleichung:

$$(6) \qquad \begin{vmatrix} P_i, & P_i', & P_i'' \\ P_{i+1}, & P_{i+1}', & P_{i+1}'' \\ P_{i+2}, & P_{i+2}', & P_{i+2}'' \end{vmatrix} = 1.$$

Hieraus folgt weiter, dass durch Auflösung der Gleichungen (3) nach a_0, a_1, a_2 für jedes i drei Gleichungen hervorgehen von folgender Gestalt:

$$(7) \qquad \begin{cases} a_0 = p_i a_i + q_i a_{i+1} + r_i a_{i+2} \\ a_1 = p_i' a_i + q_i' a_{i+1} + r_i' a_{i+2} \\ a_2 = p_i'' a_i + q_i'' a_{i+1} + r_i'' a_{i+2}, \end{cases}$$

deren Coefficienten ganze Zahlen sind. Die Determinante dieser aufgelösten Gleichungen ist aber bekanntlich dem reciproken Werthe der Determinante der ursprünglichen Gleichungen (3) gleich, und folglich findet sich die fernere Gleichung:

$$(8) \qquad \begin{vmatrix} p_i, & q_i, & r_i \\ p_i', & q_i', & r_i' \\ p_i'', & q_i'', & r_i'' \end{vmatrix} = 1,$$

und die einzelnen Elemente der Determinante (6) werden die zu den entsprechenden Elementen der Determinante (8) adjungirten zweigliedrigen Unterdeterminanten sein, und umgekehrt.

Wird endlich in der ersten der Gleichungen (7) i in $i + 1$ verwandelt, sodass

$$a_0 = p_{i+1} a_{i+1} + q_{i+1} a_{i+2} + r_{i+1} a_{i+3}$$

erhalten wird, und nun statt a_{i+3} sein Werth nach den Gleichungen (1) eingesetzt, so kommt

$$a_0 = r_{i+1} a_i + (p_{i+1} + l_i r_{i+1}) a_{i+1} + (q_{i+1} + m_i r_{i+1}) a_{i+2},$$

eine Gleichung, welche mit der ersten der Gleichungen (7) verglichen, und wenn man bedenkt, dass in den Beziehungen (1)

ebenso gut wie a_0, a_1, a_2 auch die letzten drei Grössen a_{i+1}, a_{i+2}, a_{i+3} als die beliebigen, gegebenen Grössen aufgefasst werden können, aus denen dann die übrigen vermittelst jener Beziehungen hervorgehen, noch folgende Gleichungen erschliessen lässt:

$$(9)\quad r_{i+1} = p_i, \quad p_{i+1} + l_i r_{i+1} = q_i, \quad q_{i+1} + m_i r_{i+1} = r_i$$

oder umgekehrt:

$$(10)\quad p_{i+1} = q_i - l_i p_i, \quad q_{i+1} = r_i - m_i p_i, \quad r_{i+1} = p_i.$$

Diese Gleichungen können dazu dienen, die Coefficienten der Gleichungen (7) allmählich zu berechnen ohne Zwischenkunft der Grössen P_i, P_i', P_i''. Da die mittlere der Formeln (9), wenn i in $i+1$ verwandelt wird,

$$q_{i+1} = p_{i+2} + l_{i+1} r_{i+2} \quad \text{d. h.} \quad p_{i+2} + l_{i+1} p_{i+1},$$

und die mittlere der Gleichungen (10) für $i > 0$

$$q_{i+1} = p_{i-1} - m_i p_i$$

ergiebt, so erhält man durch Vergleichung beider Ausdrücke noch die Beziehung

$$(11)\qquad p_{i+2} = p_{i-1} - m_i p_i - l_{i+1} p_{i+1},$$

um die Grössen p_i aus den jedesmal vorhergehenden drei ähnlichen Grössen zu berechnen, worauf dann die Formeln (10) die Grössen q_i und r_i finden lassen.

Ganz die gleichen Beziehungen, welche die Formeln (9), (10) und (11) zwischen den Grössen p_i, q_i, r_i ausdrücken, bestehen aber offenbar auch zwischen den Grössen p_i', q_i', r_i' bez. zwischen den Grössen p_i'', q_i'', r_i''.

3. Wir wollen nunmehr die bisher beliebigen positiven ganzen Zahlen l_i, m_i bestimmter wählen. Unter u_0, v_0, w_0 nämlich wollen wir drei gegebene positive Werthe verstehen, von welchen w_0 der grösste sei. Dann seien l_0, m_0 die den Brüchen $\frac{v_0}{u_0}$, $\frac{w_0}{u_0}$ nächst kleineren ganzen Zahlen; indem man setzt

$$v_0 - l_0 u_0 = u_1, \quad w_0 - m_0 u_0 = v_1, \quad u_0 = w_1,$$

seien l_1, m_1 die den Brüchen $\frac{v_1}{u_1}$, $\frac{w_1}{u_1}$ nächst kleineren Ganzen, dann

$$v_1 - l_1 u_1 = u_2, \quad w_1 - m_1 u_1 = v_2, \quad u_1 = w_2,$$

wiederum l_2, m_2 die den Brüchen $\frac{v_2}{v_2}$, $\frac{w_2}{u_2}$ nächst kleineren Ganzen u. s. f., sodass allgemein l_i, m_i die den Brüchen $\frac{v_i}{u_i}$, $\frac{w_i}{u_i}$ nächst kleineren Ganzen sind und aus u_i, v_i, w_i die nächstfolgenden u_{i+1}, v_{i+1}, w_{i+1} durch die Formeln

$$(12) \quad v_i - l_i u_i = u_{i+1}, \quad w_i - m_i u_i = v_{i+1}, \quad u_i = w_{i+1}$$

gewonnen werden. Bedeuten jetzt in den rekurrirenden Gleichungen (1) l_i, m_i die so bestimmten positiven ganzen Zahlen, so werden alle Resultate der vorigen Nummer Bestand behalten. Wir wollen den Algorithmus (1) dann den zu den Werthen $\frac{v_0}{u_0}$, $\frac{w_0}{u_0}$ gehörigen Kettenbruchalgorithmus nennen.

Setzt man nun

$$(13) \quad U = a_0 u_0 + a_1 v_0 + a_2 w_0$$

und

$$(14) \quad U_i = a_i u_i + a_{i+1} v_i + a_{i+2} w_i,$$

so ist leicht ersichtlich, dass der letztere Ausdruck unverändert bleibt, wenn i in $i + 1$ verwandelt wird, und dass demnach die Ausdrücke (13), (14) einander gleich sind. Denn ersetzt man in

$$U_{i+1} = a_{i+1} u_{i+1} + a_{i+2} v_{i+1} + a_{i+3} w_{i+1}$$

die Grössen u_{i+1}, v_{i+1}, w_{i+1} durch ihre Werthe (12), so wird

$$U_{i+1} = a_{i+1} v_i + a_{i+2} w_i + (a_{i+3} - m_i a_{i+2} - l_i a_{i+1}) u_i$$

d. h. der letzten der Gleichungen (1) zufolge

$$U_{i+1} = a_i u_i + a_{i+1} v_i + a_{i+2} w_i = U_i.$$

Hiernach besteht die Gleichung

$$a_i u_i + a_{i+1} v_i + a_{i+2} w_i = a_0 u_0 + a_1 v_0 + a_2 w_0.$$

Werden nun hierin für a_i, a_{i+1}, a_{i+2} ihre Werthe (3) eingesetzt und die Coefficienten der Unbestimmten a_0, a_1, a_2 auf beiden Seiten mit einander verglichen, so gehen daraus folgende drei Beziehungen hervor:

$$(15)\qquad \begin{cases} u_0 = P_i u_i + P_{i+1} v_i + P_{i+2} w_i \\ v_0 = P_i' u_i + P_{i+1}' v_i + P_{i+2}' w_i \\ w_0 = P_i'' u_i + P_{i+1}'' v_i + P_{i+2}'' w_i, \end{cases}$$

aus denen, wie die Gleichungen (7) aus den Gleichungen (3), durch Umkehrung noch die nachstehenden erschlossen werden können:

$$(16)\qquad \begin{cases} u_i = p_i u_0 + p_i' v_0 + p_i'' w_0 \\ v_i = q_i u_0 + q_i' v_0 + q_i'' w_0 \\ w_i = r_i u_0 + r_i' v_0 + r_i'' w_0. \end{cases}$$

Setzen wir jetzt den Fall, in der Reihe der Systeme $\frac{v_i}{u_i}, \frac{w_i}{u_i}$, welche den aufeinanderfolgenden Werthen des Index i entsprechen, kehre einmal eins wieder, sodass etwa

$$(17)\qquad \frac{v_{k+h}}{u_{k+h}} = \frac{v_k}{u_k}, \qquad \frac{w_{k+h}}{u_{k+h}} = \frac{w_k}{u_k}$$

sei. Dann werden natürlich auch die diesen Brüchen nächst kleineren Ganzen übereinstimmen, d. h.

$$l_{k+h} = l_k, \quad m_{k+h} = m_k$$

sein. Aus (12) folgen die Gleichungen

$$\frac{v_{k+1}}{u_{k+1}} = \frac{\frac{w_k}{u_k} - m_k}{\frac{v_k}{u_k} - l_k}, \qquad \frac{w_{k+1}}{u_{k+1}} = \frac{1}{\frac{v_k}{u_k} - l_k};$$

sie lehren offenbar, dass unter den gemachten Voraussetzungen auch $\frac{v_{k+1}}{u_{k+1}}, \frac{w_{k+1}}{u_{k+1}}$ sich nicht ändern, wenn der Index um h Einheiten wächst, dass mit andern Worten auch

$$\frac{v_{k+h+1}}{u_{k+h+1}} = \frac{v_{k+1}}{u_{k+1}}, \qquad \frac{w_{k+h+1}}{u_{k+h+1}} = \frac{w_{k+1}}{u_{k+1}}$$

und folglich auch

$$l_{k+h+1} = l_{k+1}, \quad m_{k+h+1} = m_{k+1}$$

ist. So kann man gleicherweise fortschreiten und findet also allmählich auch

$$\frac{v_{k+2h}}{u_{k+2h}} = \frac{v_{k+h}}{u_{k+h}}, \quad \frac{w_{k+2h}}{u_{k+2h}} = \frac{w_{k+h}}{u_{k+h}},$$

d. h. mit Rücksicht auf die ursprüngliche Annahme

$$\frac{v_{k+2h}}{u_{k+2h}} = \frac{v_k}{u_k}, \quad \frac{w_{k+2h}}{u_{k+2h}} = \frac{w_k}{u_k}. \tag{18}$$

Die beiden ersten der Gleichungen (15) aber liefern für das Verhältniss $\frac{v_0}{u_0}$ folgenden Werth:

$$\frac{v_0}{u_0} = \frac{P_i' + P_{i+1}' \cdot \frac{v_i}{u_i} + P_{i+2}' \cdot \frac{w_i}{u_i}}{P_i + P_{i+1} \cdot \frac{v_i}{u_i} + P_{i+2} \cdot \frac{w_i}{u_i}},$$

oder die Gleichung

$$0 = \left(P_i \cdot \frac{v_0}{u_0} - P_i'\right) + \frac{v_i}{u_i}\left(P_{i+1} \cdot \frac{v_0}{u_0} - P_{i+1}'\right) + \frac{w_i}{u_i}\left(P_{i+2} \cdot \frac{v_0}{u_0} - P_{i+2}'\right).$$

Indem wir in der letztern für i die drei Werthe k, $k+h$, $k+2h$ einsetzen und die Gleichungen (17) und (18) beachten, gewinnen wir folgende drei Gleichungen:

$$0 = P_k \cdot \frac{v_0}{u_0} - P_k' + \frac{v_k}{u_k}\left(P_{k+1} \cdot \frac{v_0}{u_0} - P_{k+1}'\right) + \frac{w_k}{u_k}\left(P_{k+2} \cdot \frac{v_0}{u_0} - P_{k+2}'\right)$$

$$0 = P_{k+h} \cdot \frac{v_0}{u_0} - P_{k+h}' + \frac{v_k}{u_k}\left(P_{k+h+1} \cdot \frac{v_0}{u_0} - P_{k+h+1}'\right) + \frac{w_k}{u_k}\left(P_{k+h+2} \cdot \frac{v_0}{u_0} - P_{k+h+2}'\right)$$

$$0 = P_{k+2h} \cdot \frac{v_0}{u_0} - P_{k+2h}' + \frac{v_k}{u_k}\left(P_{k+2h+1} \cdot \frac{v_0}{u_0} - P_{k+2h+1}'\right) + \frac{w_k}{u_k}\left(P_{k+2h+2} \cdot \frac{v_0}{u_0} - P_{k+2h+2}'\right),$$

welche nur bestehen können, wenn ihre Determinante verschwindet. So ergiebt sich die Bedingung:

$$0 = \begin{vmatrix} P_k \cdot \frac{v_0}{u_0} - P'_k, & P_{k+1} \cdot \frac{v_0}{u_0} - P'_{k+1}, & P_{k+2} \cdot \frac{v_0}{u_0} - P'_{k+2} \\ P_{k+h} \cdot \frac{v_0}{u_0} - P'_{k+h}, & P_{k+h+1} \cdot \frac{v_0}{u_0} - P'_{k+h+1}, & P_{k+h+2} \cdot \frac{v_0}{u_0} - P'_{k+h+2} \\ P_{k+2h} \cdot \frac{v_0}{u_0} - P'_{k+2h}, & P_{k+2h+1} \cdot \frac{v_0}{u_0} - P'_{k+2h+1}, & P_{k+2h+2} \cdot \frac{v_0}{u_0} - P'_{k+2h+2} \end{vmatrix}.$$

Sie ist, entwickelt gedacht, in Bezug auf $\frac{v_0}{u_0}$ eine kubische Gleichung, deren sämmtliche Coefficienten ganze Zahlen sind. Denn diese setzen sich aus den ganzzahligen P_i, P'_i, P''_i durch Additionen, Subtraktionen und Multiplikationen zusammen. Ganz dasselbe Ergebniss kann aus der ersten und dritten der Gleichungen (15) bezüglich des Verhältnisses $\frac{w_0}{u_0}$ hergeleitet werden, und so finden wir endlich den Satz, welcher mit dem von Fürstenau im Wesentlichen identisch ist: Ist der zu den Grössen $\frac{v_0}{u_0}$, $\frac{w_0}{u_0}$ gehörige Kettenbruchalgorithmus periodisch, d. h. stösst man bei ihm auf die Gleichungen (17), so sind $\frac{v_0}{u_0}$, $\frac{w_0}{u_0}$ gleichzeitig Wurzeln kubischer Gleichungen mit ganzzahligen Coefficienten, d. h. sie sind kubische Irrationellen.

4. Wir wenden uns nunmehr zu der umgekehrten Frage, ob für alle kubischen Irrationellen der Jacobi'sche Kettenbruchalgorithmus periodisch sei oder nicht; wir werden uns bei ihrer Behandlung auf den einfachsten Fall beschränken, in welchem die Irrationelle eine Kubikwurzel aus einer ganzen Zahl ist, beginnen aber mit einigen allgemeiner giltigen Bemerkungen.

Die kubische Gleichung, welcher die Irrationelle genügt, sei die Gleichung

$$x^3 + c_1 x^2 + c_2 x + c_3 = 0 \tag{19}$$

mit ganzzahligen Coefficienten, und von ihren Wurzeln α, β, γ sei die eine, etwa α, reell und positiv, die beiden andern β, γ conjugirt imaginär. Unter einer ganzen complexen Zahl verstehen wir jeden Ausdruck von der Form

$$r\alpha^2 + s\alpha + t$$

mit ganzzahligen Coefficienten r, s, t, und nennen jeden gemeinsamen Theiler dieser Coefficienten einen Theiler der complexen Zahl. Die Ausdrücke, welche aus jenem hervorgehen, wenn α durch β und γ ersetzt wird, und welche offenbar zu einander conjugirt imaginär sind, heissen die ihm conjugirten complexen Zahlen. Das Produkt aller drei conjugirt complexen Zahlen, nämlich

$$(r\alpha^2 + s\alpha + t)(r\beta^2 + s\beta + t)(r\gamma^2 + s\gamma + t)$$

heisst ihre gemeinsame Norm.

Hier gelten zunächst folgende einfache Bemerkungen:

1) Sind

$$r\alpha^2 + s\alpha + t, \quad r'\alpha^2 + s'\alpha + t'$$

zwei ganze complexe Zahlen, so lässt sich dem Produkte

$$(r\alpha^2 + s\alpha + t)(r'\alpha^2 + s'\alpha + t')$$

vermittelst der Identität

$$\alpha^3 + c_1\alpha^2 + c_2\alpha + c_3 = 0$$

wieder die Gestalt einer ganzen complexen Zahl

$$r''\alpha^2 + s''\alpha + t''$$

geben.

2) Da β, γ die Wurzeln der Gleichung

$$x^2 + (\alpha + c_1)x + \alpha^2 + c_1\alpha + c_2 = 0$$

also

$$\beta + \gamma = -(\alpha + c_1), \quad \beta\gamma = \alpha^2 + c_1\alpha + c_2$$

sind, findet sich leicht, dass das Produkt

$$(r\beta^2 + s\beta + t) \cdot (r\gamma^2 + s\gamma + t),$$

dessen Werth positiv ist, da die Faktoren conjugirt imaginär sind, als eine ganze complexe Zahl

$$r_1\alpha^2 + s_1\alpha + t_1$$

geschrieben werden kann.

3) Die Norm einer complexen ganzen Zahl:

$$(r\alpha^2 + s\alpha + t) \cdot (r\beta^2 + s\beta + t) \cdot (r\gamma^2 + s\gamma + t)$$

ist, als ganze und ganzzahlige symmetrische Funktion von den Wurzeln der Gleichung (19), gleich einer reellen ganzen Zahl.

Dies vorausgeschickt, verstehen wir unter den Zeichen u_0, v_0, w_0 jetzt die Werthe

$$u_0 = 1, \quad v_0 = \alpha, \quad w_0 = \alpha^2$$

und bilden den Jacobi'schen Kettenbruchalgorithmus, welcher zu den Grössen $\frac{v_0}{u_0} = \alpha$, $\frac{w_0}{u_0} = \alpha^2$ gehört, jedoch auf folgende, von der früheren etwas abweichende Weise: Wir nennen l_0, m_0 die grössten Ganzen, welche in

$$\frac{v_0}{u_0} = \alpha, \quad \frac{w_0}{u_0} = \alpha^2$$

enthalten sind, der Art, dass

$$v_0 - l_0 u_0, \quad w_0 - m_0 u_0$$

positive Werthe bezeichnen. Aus den Grössen

$$u_0, v_0, w_0, l_0, m_0$$

bilden wir nun andere:

$$u_1, v_1, w_1, l_1, m_1,$$

aus diesen wieder andere:

$$u_2, v_2, w_2, l_2, m_2$$

u. s. w. nach bestimmtem Gesetze. Wir bezeichnen nämlich mit l_i, m_i jedesmal die in den Brüchen $\frac{v_i}{u_i}$, $\frac{w_i}{u_i}$ enthaltenen nächst kleineren ganzen Zahlen, sodass immer

$$v_i - l_i u_i, \quad w_i - m_i u_i, \quad u_i$$

positive Werthe werden, sobald es die Grössen u_i, v_i, w_i schon sind. Ist ferner schon u_i eine ganze Zahl, und v_i, w_i complexe ganze Zahlen, so sind letzteres auch $v_i - l_i u_i$, $w_i - m_i u_i$. Werden daher unter v_i', v_i'' die zu v_i conjugirten Zahlen verstanden, so ist nach 2) der positive Ausdruck

$$f_i = (v_i' - l_i u_i)(v_i'' - l_i u_i) \tag{20}$$

eine complexe ganze Zahl, und die drei Produkte

(21) $$f_i(v_i - l_i u_i),\quad f_i(w_i - m_i u_i),\quad f_i u_i$$

nach 1) ebenfalls complexe ganze Zahlen, das erste sogar nach 3) eine reelle ganze Zahl, alle drei von positivem Werthe. Nennt man endlich g_i die grösste, positiv genommene ganze Zahl, die gleichzeitig Theiler aller drei Zahlen (21) ist, so sollen aus den vorhergehenden Grössen

$$u_i,\ v_i,\ w_i$$

die jedesmal folgenden u_{i+1}, v_{i+1}, w_{i+1} durch nachstehende Gleichungen gebildet werden:

(22) $$\begin{cases} g_i u_{i+1} = f_i(v_i - l_i u_i) \\ g_i v_{i+1} = f_i(w_i - m_i u_i) \\ g_i w_{i+1} = f_i u_i . \end{cases}$$

Da für $i = 0$ die bezüglich u_i, v_i, w_i gemachten Voraussetzungen erfüllt sind, so bleiben u_i, v_i, w_i hiernach für jeden Werth des Index i positive Werthe, die erste eine reelle, die beiden andern complexe ganze Zahlen, während l_i, m_i stets positive ganze Zahlen oder die Null bedeuten. Wird noch

(23) $$F_0 = 1$$

und für $i > 0$

(24) $$F_i = \frac{f_0}{g_0} \cdot \frac{f_1}{g_1} \cdot \frac{f_2}{g_2} \cdots \frac{f_{i-1}}{g_{i-1}}$$

gesetzt, so nehmen die Gleichungen (22) die Gestalt an:

(25) $$\begin{cases} \frac{u_{i+1}}{F_{i+1}} = \frac{v_i}{F_i} - l_i \cdot \frac{u_i}{F_i} \\ \frac{v_{i+1}}{F_{i+1}} = \frac{w_i}{F_i} - m_i \cdot \frac{u_i}{F_i} \\ \frac{w_{i+1}}{F_{i+1}} = \frac{u_i}{F_i} . \end{cases}$$

Die Vergleichung dieser Beziehungen mit den Gleichungen (12), sowie die Bemerkung, dass die Grössen $\frac{u_i}{F_i}$, $\frac{v_i}{F_i}$, $\frac{w_i}{F_i}$ dieselben Verhältnisse haben wie bez. die Grössen u_i, v_i, w_i zu einander, lässt erkennen, dass gegenwärtig die Grössen

$$\frac{u_i}{F_i},\ \frac{v_i}{F_i},\ \frac{w_i}{F_i},\ l_i,\ m_i$$

genau in derselben Weise zu einander bestimmt sind, wie früher die Grössen

$$u_i,\ v_i,\ w_i,\ l_i,\ m_i;$$

infolge davon müssen zwischen jenen dieselben Formeln bestehen, die wir in voriger Nummer für die letztern hergeleitet haben; z. B. finden sich an Stelle der Gleichungen (15) und (16) gegenwärtig nachstehende Gleichungen:

$$(26)\quad \begin{cases} F_i u_0 = P_i u_i + P_{i+1} v_i + P_{i+2} w_i \\ F_i v_0 = P_i' u_i + P_{i+1}' v_i + P_{i+2}' w_i \\ F_i w_0 = P_i'' u_i + P_{i+1}'' v_i + P_{i+2}'' w_i \end{cases}$$

und

$$(27)\quad \begin{cases} \dfrac{u_i}{F_i} = p_i u_0 + p_i' v_0 + p_i'' w_0 \\ \dfrac{v_i}{F_i} = q_i u_0 + q_i' v_0 + q_i'' w_0 \\ \dfrac{w_i}{F_i} = r_i u_0 + r_i' v_0 + r_i'' w_0 . \end{cases}$$

Die erste der Gleichungen (26) lehrt offenbar, dass F_i immer eine ganze complexe Zahl ist.

5. Nach diesen Vorbereitungen betrachten wir nun eine ganze complexe Zahl

$$x\alpha^2 + y\alpha + z$$

mit unbestimmten Coefficienten x, y, z. Ihre Norm $N(x, y, z)$, nämlich das Produkt

$$(28)\quad (x\alpha^2 + y\alpha + z) \cdot (x\beta^2 + y\beta + z) \cdot (x\gamma^2 + y\gamma + z)$$

ist offenbar eine homogene Funktion dritten Grades von x, y, z mit bezüglich der Wurzeln α, β, γ der kubischen Gleichung (19) symmetrischen also ganzzahligen Coefficienten, eine sogenannte ternäre kubische Form. Man findet sie in der That durch eine einfache Rechnung gleich

$$(29)\quad \begin{aligned} &c_3^2 x^3 - c_2 c_3 x^2 y + c_1 c_3 x y^2 - c_3 y^3 + (c_2^2 - 2c_1 c_3) x^2 z \\ &+ (c_1^2 - 2c_2) x z^2 + c_2 y^2 z - c_1 y z^2 + (3c_3 - c_1 c_2) x y z + z^3. \end{aligned}$$

Wird nun auf diese Form die Substitution angewendet:

$$(30)\quad \begin{cases} x = P_i x' + P_{i+1} y' + P_{i+2} z' \\ y = P_i' x' + P_{i+1}' y' + P_{i+2}' z' \\ z = P_i'' x' + P_{i+1}'' y' + P_{i+2}'' z', \end{cases}$$

so geht sie in eine andere ternäre kubische Form über, welche $N_i(x', y', z')$ heisse und durch den Ausdruck

$$\begin{aligned}&[p_i(\alpha)\cdot x' + p_{i+1}(\alpha)\cdot y' + p_{i+2}(\alpha)\cdot z']\\ \cdot\,&[p_i(\beta)\cdot x' + p_{i+1}(\beta)\cdot y' + p_{i+2}(\beta)\cdot z']\\ \cdot\,&[p_i(\gamma)\cdot x' + p_{i+1}(\gamma)\cdot y' + p_{i+2}(\gamma)\cdot z']\end{aligned}$$

gegeben wird, worin

$$p_i(\alpha) = P_i\alpha^2 + P_i'\alpha + P_i'' \tag{31}$$

und $p_i(\beta)$, $p_i(\gamma)$ die zu $p_i(\alpha)$ conjugirten complexen ganzen Zahlen sind, oder auch durch die Gleichung

$$N_i(x', y', z') = N_i(\alpha)\cdot N_i(\beta)\cdot N_i(\gamma), \tag{32}$$

wenn gesetzt wird

$$\left\{\begin{aligned}N_i(\alpha) &= p_i(\alpha)x' + p_{i+1}(\alpha)y' + p_{i+2}(\alpha)z'\\ N_i(\beta) &= p_i(\beta)x' + p_{i+1}(\beta)y' + p_{i+2}(\beta)z'\\ N_i(\gamma) &= p_i(\gamma)x' + p_{i+1}(\gamma)y' + p_{i+2}(\gamma)z'.\end{aligned}\right. \tag{33}$$

Werden aber zur Abkürzung die Bezeichnungen eingeführt:

$$\varpi_i = p_i(\alpha)p_i(\beta)p_i(\gamma), \tag{34}$$

sodass ϖ_i eine positive ganze Zahl ist, und

$$\left\{\begin{aligned}\varphi_i(\alpha) &= p_{i+1}(\alpha)\,p_i(\beta)\,p_i(\gamma)\\ \psi_i(\alpha) &= p_{i+2}(\alpha)\,p_i(\beta)\,p_i(\gamma),\end{aligned}\right. \tag{35}$$

sodass $\varphi_i(\alpha)$, $\psi_i(\alpha)$ complexe ganze Zahlen sind, deren Werth gleichfalls positiv ist, und welche die Form haben:

$$\left\{\begin{aligned}\varphi_i(\alpha) &= \xi_i'\alpha^2 + \eta_i'\alpha + \zeta_i'\\ \psi_i(\alpha) &= \xi_i''\alpha^2 + \eta_i''\alpha + \zeta_i'',\end{aligned}\right. \tag{36}$$

so lassen sich die Gleichungen (33) auch in folgender Weise schreiben:

$$\left\{\begin{aligned}N_i(\alpha) &= \frac{1}{p_i(\beta)\,p_i(\gamma)}\cdot[\varpi_i x' + \varphi_i(\alpha)\,y' + \psi_i(\alpha)\,z']\\ N_i(\beta) &= \frac{1}{p_i(\gamma)\,p_i(\alpha)}\cdot[\varpi_i x' + \varphi_i(\beta)\,y' + \psi_i(\beta)\,z']\\ N_i(\gamma) &= \frac{1}{p_i(\alpha)\,p_i(\beta)}\cdot[\varpi_i x' + \varphi_i(\gamma)\,y' + \psi_i(\gamma)\,z'].\end{aligned}\right. \tag{37}$$

Die Gleichungen (33) kann man entstanden denken durch Zusammensetzung der beiden Systeme linearer Gleichungen:

$$(38)\qquad \begin{cases} N_i(\alpha) = x\alpha^2 + y\alpha + z \\ N_i(\beta) = x\beta^2 + y\beta + z \\ N_i(\gamma) = x\gamma^2 + y\gamma + z \end{cases}$$

und (30); demnach ist ihre Determinante gleich dem Produkte der Determinanten dieser Systeme, d. h. gleich der Discriminante der Gleichung (19) mal der Determinante (6), welche der Einheit gleich ist. Desgleichen können die Gleichungen (37) erhalten werden durch Zusammensetzung der Gleichungen

$$(39)\qquad \begin{cases} N_i(\alpha) = \dfrac{1}{p_i(\beta)\,p_i(\gamma)} \cdot x_0 \\ N_i(\beta) = \dfrac{1}{p_i(\gamma)\,p_i(\alpha)} \cdot y_0 \\ N_i(\gamma) = \dfrac{1}{p_i(\alpha)\,p_i(\beta)} \cdot z_0 \end{cases}$$

zuerst mit den Gleichungen

$$(40)\qquad \begin{cases} x_0 = x\alpha^2 + y\alpha + z \\ y_0 = x\beta^2 + y\beta + z \\ z_0 = x\gamma^2 + y\gamma + z \end{cases}$$

und darauf mit den Gleichungen

$$(41)\qquad \begin{cases} x = \xi_i' y' + \xi_i'' z' \\ y = \eta_i' y' + \eta_i'' z' \\ z = \varpi_i x' + \zeta_i' y' + \zeta_i'' z'; \end{cases}$$

demnach ist ihre Determinante, d. h. die Determinante der gleichbedeutenden Gleichungen (33) auch gleich dem Produkte der Determinanten dieser drei Systeme (39), (40) und (41), und durch Vergleichung der so für die Determinante der Gleichungen (33) gefundenen beiden Werthe ergiebt sich ohne Weiteres die Beziehung:

$$1 = \frac{\varpi_i(\xi_i'\eta_i'' - \xi_i''\eta_i')}{p_i(\beta)\,p_i(\gamma)\cdot p_i(\gamma)\,p_i(\alpha)\cdot p_i(\alpha)\,p_i(\beta)}$$

oder einfacher die Gleichung:

$$(42)\qquad \varpi_i = \xi_i'\eta_i'' - \xi_i''\eta_i'.$$

Die Formel (32) liefert, wenn man dem Index i alle möglichen Werthe beilegt, eine unbegrenzte Menge von

Formen, welche der Form $N(x,y,z)$ und daher auch unter einander äquivalent sind, da die Determinante der Substitutionen (30) der Einheit gleich ist. Um jede aus der vorhergehenden herzuleiten und so beliebig viele von ihnen allmählich zu berechnen, dient die Bemerkung, dass den Gleichungen (5) zufolge die Beziehung statthat:

$$p_{i+3}(\alpha) = p_i(\alpha) + l_i \cdot p_{i+1}(\alpha) + m_i \cdot p_{i+2}(\alpha).$$

Hiernach wird

(43) $$p_{i+1}(\alpha)x' + p_{i+2}(\alpha)y' + p_{i+3}(\alpha)z'$$
$$= p_i(\alpha)z' + p_{i+1}(\alpha)(x' + l_i z') + p_{i+2}(\alpha)(y' + m_i z')$$

d. h. $N_{i+1}(\alpha)$ geht aus $N_i(\alpha)$ hervor durch die Substitution

$$\begin{pmatrix} 0, & 0, & 1 \\ 1, & 0, & l_i \\ 0, & 1, & m_i \end{pmatrix}$$

und die solches aussprechende Gleichung (43) lässt sich schreiben wie folgt:

$$p_{i+1}(\beta)p_{i+1}(\gamma)\cdot\left[\varphi_i(\alpha)x' + \psi_i(\alpha)y' + \left(\varpi_i + l_i\varphi_i(\alpha) + m_i\psi_i(\alpha)\right)z'\right]$$
$$= p_i(\beta)p_i(\gamma)\cdot\left[\varpi_{i+1}x' + \varphi_{i+1}(\alpha)y' + \psi_{i+1}(\alpha)z'\right],$$

und ergiebt durch Vergleichung der Coefficienten von y', z' auf beiden Seiten folgende Formeln:

(44) $$\varphi_{i+1}(\alpha) = \frac{\varpi_{i+1}\cdot\psi_i(\alpha)}{\varphi_i(\alpha)}$$

(45) $$\psi_{i+1}(\alpha) = \frac{\varpi_{i+1}(\varpi_i + l_i\varphi_i(\alpha) + m_i\psi_i(\alpha))}{\varphi_i(\alpha)}.$$

Ferner findet man leicht bestätigt, dass

(46) $$N\varphi_i(\alpha) = \varpi_{i+1}\cdot\varpi_i^2$$

ist. Die Formeln (44), (45) und (46) dienen zur allmählichen Berechnung der Formen (32); in der That lässt sich vermittelst derselben aus der Form

$$N_i(x',y',z') = \frac{1}{\varpi_i^2}\cdot N\left(\varpi_i x' + \varphi_i(\alpha)y' + \psi_i(\alpha)z'\right)$$

unmittelbar die Form

$$N_{i+1}(x', y', z') = \frac{1}{\varpi_{i+1}^2} \cdot N\left(\varpi_{i+1} x' + \varphi_{i+1}(\alpha) y' + \psi_{i+1}(\alpha) z'\right)$$

herleiten, sobald, wie angenommen wird, die Zahlen l_i, m_i bekannt sind.

6. Von nun an beschränken wir uns auf den Fall, dass die kubische Gleichung (19) die einfache Gestalt

$$x^3 - D = 0 \tag{47}$$

hat, während D eine positive ganze Zahl ist; so werden α, β, γ die drei Werthe der Kubikwurzel aus D, α ihr reeller Werth und folglich

$$\beta = \varrho\alpha, \quad \gamma = \varrho^2\alpha,$$

wo $\varrho^2 + \varrho + 1 = 0$ ist.

Aus den Gleichungen (26) ergiebt sich ohne Mühe

$$F_i p_i(\alpha) p_i(\gamma) \cdot (u_0\beta^2 + v_0\beta + w_0) = u_i \varpi_i + v_i \varphi_i(\beta) + w_i \psi_i(\beta).$$

Da aber $u_0 = 1$, $v_0 = \alpha$, $w_0 = \alpha^2$ gesetzt worden ist, wird

$$u_0\beta^2 + v_0\beta + w_0 = \varrho^2\alpha^2 + \varrho\alpha^2 + \alpha^2 = 0$$

sein, also kommt

$$u_i\varpi_i + v_i\varphi_i(\beta) + w_i\psi_i(\beta) = 0.$$

Hierin sind u_i, v_i, w_i reell; trennt man also das Reelle vom Imaginären, so entstehen folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} \varpi_i u_i + v_i\xi_i' + w_i\xi_i'' &= (v_i\eta_i' + w_i\eta_i'')\alpha \\ &= (v_i\xi_i' + w_i\xi_i'')\alpha^2 \end{aligned}$$

oder, anders geschrieben:

$$\frac{v_i}{u_i}(\eta_i'\alpha - \zeta_i') + \frac{w_i}{u_i}(\eta_i''\alpha - \zeta_i'') = \varpi_i$$

$$\frac{v_i}{u_i}(\xi_i'\alpha - \eta_i') + \frac{w_i}{u_i}(\xi_i''\alpha - \eta_i'') = 0.$$

Wir nennen $-\Delta_i$ die Determinante dieser Gleichungen und setzen

$$\begin{aligned} \varpi_i &= \xi_i'\eta_i'' - \xi_i''\eta_i', \quad \varpi_i' = \zeta_i'\xi_i'' - \zeta_i''\xi_i' \\ \varpi_i'' &= \eta_i'\zeta_i'' - \eta_i''\zeta_i', \end{aligned} \tag{48}$$

dann findet man

$$\Delta_i = \varpi_i\alpha^2 + \varpi_i'\alpha + \varpi_i'' \tag{49}$$

und durch Auflösung der Gleichungen nach $\frac{v_i}{u_i}$, $\frac{w_i}{u_i}$ folgende Werthe:

$$(50)\quad \frac{v_i}{u_i} = -\frac{\varpi_i}{\Delta_i}(\xi_i''\alpha - \eta_i''), \quad \frac{w_i}{u_i} = \frac{\varpi_i}{\Delta_i}(\xi_i'\alpha - \eta_i').$$

Mit Hilfe dieser Gleichungen kann nun gezeigt werden, dass, wenn für zwei Werthe des Index i, etwa für $i = k$ und $i = k + h$, das Grössensystem

$$(51)\qquad \varpi_i,\ \varphi_i(\alpha),\ \psi_i(\alpha)$$

dieselben Werthe erhält, Gleiches auch von dem Grössensysteme

$$(52)\qquad \frac{v_i}{u_i},\ \frac{w_i}{u_i}$$

gelte und umgekehrt.

In der That, ist

$$(53)\quad \varpi_{k+h} = \varpi_k,\quad \varphi_{k+h}(\alpha) = \varphi_k(\alpha),\quad \psi_{k+h}(\alpha) = \psi_k(\alpha),$$

so wird $\varpi'_{k+h} = \varpi'_k$, $\varpi''_{k+h} = \varpi''_k$ sein müssen, und die Formeln (49) und (50) ergeben dann auch die Gleichungen:

$$(54)\qquad \frac{v_{k+h}}{u_{k+h}} = \frac{v_k}{u_k},\quad \frac{w_{k+h}}{u_{k+h}} = \frac{w_k}{u_k}.$$

Umgekehrt folgt aus den letzteren zunächst

$$\frac{w_{k+h}}{v_{k+h}} = \frac{w_k}{v_k}$$

oder nach (50):

$$\frac{\xi'_{k+h}\cdot\alpha - \eta'_{k+h}}{\xi''_{k+h}\cdot\alpha - \eta''_{k+h}} = \frac{\xi'_k\cdot\alpha - \eta'_k}{\xi''_k\cdot\alpha - \eta''_k}$$

d. h. die drei Gleichungen:

$$(55)\qquad \begin{gathered}\xi'_{k+h}\xi''_k - \xi''_{k+h}\xi'_k = 0,\quad \eta'_{k+h}\eta''_k - \eta''_{k+h}\eta'_k = 0\\ \xi'_{k+h}\eta''_k - \eta''_{k+h}\xi'_k = \xi''_{k+h}\eta'_k - \eta'_{k+h}\xi''_k.\end{gathered}$$

Da

$$\varpi_k = \xi'_k\eta''_k - \xi''_k\eta'_k$$

nicht Null ist, muss eine der beiden Zahlen ξ'_k, ξ''_k wenigstens, etwa ξ''_k, von Null verschieden sein. Man findet also

$$\xi'_{k+h} = \frac{\xi'_k\xi''_{k+h}}{\xi''_k}.$$

Dann ist entweder: $\xi'_k = 0$ also $\xi'_{k+h} = 0$, aber η'_k nicht Null, folglich $\eta''_{k+h} = \frac{\eta'_{k+h}\eta''_k}{\eta'_k}$. Ist nun erstens $\eta''_k = 0$, so folgt $\eta''_{k+h} = 0$ und die dritte der Gleichungen (55) giebt $\frac{\xi''_{k+h}}{\xi''_k} = \frac{\eta'_{k+h}}{\eta'_k}$, sodass man setzen kann:

$$(56) \qquad \begin{cases} \xi''_{k+h} = \varepsilon \cdot \xi''_k & \eta'_{k+h} = \varepsilon \cdot \eta'_k \\ \eta''_{k+h} = \varepsilon \cdot \eta''_k & \xi'_{k+h} = \varepsilon \cdot \xi'_k, \end{cases}$$

während ε eine gewisse rationale Zahl bedeutet. — Ist aber zweitens η''_k nicht Null, so ergiebt sich

$$\frac{\eta''_{k+h}}{\eta''_k} = \frac{\eta'_{k+h}}{\eta'_k} = \frac{\xi''_{k+h}}{\xi''_k}$$

und daraus erhält man wieder dieselben Gleichungen (56).

Oder: ξ'_k ist nicht Null; dann kann nur eine der beiden Zahlen η'_k, η''_k Null sein, eine von ihnen, und es ist gleichgiltig, von welcher wir es voraussetzen, muss also von Null verschieden sein. Sei η'_k nicht Null, so folgt $\eta''_{k+h} = \frac{\eta'_{k+h}\eta''_k}{\eta'_k}$. Ist jetzt erstens $\eta''_k = 0$, so folgt auch $\eta''_{k+h} = 0$ und

$$\frac{\eta'_{k+h}}{\eta'_k} = \frac{\xi''_{k+h}}{\xi''_k} = \frac{\xi'_{k+h}}{\xi'_k},$$

also wieder dieselben Gleichungen (56). — Wenn aber zweitens η''_k nicht Null ist, so liefern die beiden ersten der Gleichungen (55)

$$\frac{\xi''_{k+h}}{\xi''_k} = \frac{\xi'_{k+h}}{\xi'_k}, \qquad \frac{\eta''_{k+h}}{\eta''_k} = \frac{\eta'_{k+h}}{\eta'_k},$$

die dritte aber kann geschrieben werden wie folgt:

$$\left(\frac{\eta''_{k+h}}{\eta''_k} - \frac{\xi'_{k+h}}{\xi'_k}\right) \cdot \left(\frac{\eta''_k}{\xi''_k} - \frac{\eta'_k}{\xi'_k}\right) = 0,$$

und liefert, da ϖ_k und daher der zweite Faktor nicht Null ist, die Gleichheit $\frac{\xi'_{k+h}}{\xi'_k} = \frac{\eta''_{k+h}}{\eta''_k}$, also finden sich wiederum die Gleichungen (56).

Aus diesen ergiebt sich aber $\varpi_{k+h} = \varepsilon^2 \cdot \varpi_k$, und, weil $\frac{v_{k+h}}{u_{k+h}} = \frac{v_k}{u_k}$ vorausgesetzt ist, $\Delta_{k+h} = \varepsilon^3 \cdot \Delta_k$, d. h.

$$\varepsilon^2 \varpi_k \cdot \alpha^2 + \varpi'_{k+h} \cdot \alpha + \varpi''_{k+h} = \varepsilon^3 \varpi_k \cdot \alpha^2 + \varepsilon^3 \varpi'_k \cdot \alpha + \varepsilon^3 \varpi''_k,$$

woraus zuerst $\varepsilon = 1$, also nach (56)

$$\xi''_{k+h} = \xi''_k, \quad \eta''_{k+h} = \eta''_k, \quad \xi'_{k+h} = \xi'_k, \quad \eta'_{k+h} = \eta'_k,$$

ferner

$$\varpi'_{k+h} = \varpi'_k, \quad \varpi''_{k+h} = \varpi''_k$$

oder

$$\xi''_k \cdot \xi'_{k+h} - \xi'_k \cdot \xi''_{k+h} = \xi''_k \cdot \xi'_k - \xi'_k \cdot \xi''_k$$
$$- \eta''_k \cdot \xi'_{k+h} + \eta'_k \cdot \xi''_{k+h} = - \eta''_k \cdot \xi'_k + \eta'_k \cdot \xi''_k,$$

also

$$\xi'_{k+h} = \xi'_k, \quad \xi''_{k+h} = \xi''_k,$$

und endlich, wie behauptet worden ist,

$$\varpi_{k+h} = \varpi_k, \quad \varphi_{k+h}(\alpha) = \varphi_k(\alpha), \quad \psi_{k+h}(\alpha) = \psi_k(\alpha)$$

gefunden wird.

7. Wenn nun aber die Gleichungen (53) oder (54) bestehen, so wird die Reihe der Grössensysteme (51) periodisch, indem von dem Systeme

$$\varpi_k, \ \varphi_k(\alpha), \ \psi_k(\alpha)$$

an eine Periode von h Gliedern unendlich oft sich wiederholen muss. Denn aus dem Bestehen der Gleichungen (53) und (54) folgt zunächst

$$l_{k+h} = l_k, \quad m_{k+h} = m_k,$$

sodann aber nach den Formeln (44), (45) und (46) auch

$\varpi_{k+h+1} = \varpi_{k+1}$, $\varphi_{k+h+1}(\alpha) = \varphi_{k+1}(\alpha)$, $\psi_{k+h+1}(\alpha) = \psi_{k+1}(\alpha)$

u. s. f.

Diese Bemerkung, mit der vorigen verbunden, liefert den Satz: Wenn von den beiden Reihen von Grössensystemen (51) und (52) die eine periodisch ist, so hat die andere genau dieselbe Periode.

Die Periodicität der erstern Reihe tritt ein, sobald die Grössen (51) für ein unendlich wachsendes i endlich bleiben, und umgekehrt.

Das letztere ist offenbar. Um auch das erstere zu zeigen, nehmen wir an, es sei für jedes i

$$\varpi_i < A, \quad \varphi_i(\alpha) < B, \quad \psi_i(\alpha) < C,$$

während A, B, C endliche Constanten sind. Setzt man dann

$$\varphi_i(\beta) = re^{s\sqrt{-1}}, \quad \varphi_i(\gamma) = re^{-s\sqrt{-1}},$$

wo $r > 0$ sei, so ist

$$r^2 = \varphi_i(\beta)\,\varphi_i(\gamma) = \frac{p_i(\alpha)}{p_{i+1}(\alpha)} \cdot \varpi_i\,\varpi_{i+1}$$

also, da nach den Gleichungen (5) die Grössen P_i, P_i', P_i'' und deshalb nach der Definitionsgleichung (31) auch $p_i(\alpha)$ mit wachsendem i immer grösser werden,

$$r^2 < \varpi_i\,\varpi_{i+1} < A^2, \quad r < A.$$

Daher kann man setzen:

$$\varphi_i(\alpha) = \xi_i'\alpha^2 + \eta_i'\alpha + \zeta_i' = \varepsilon B$$
$$\varphi_i(\beta) = \xi_i'\beta^2 + \eta_i'\beta + \zeta_i' = \varepsilon' A(\cos s + \sqrt{-1} \cdot \sin s)$$
$$\varphi_i(\gamma) = \xi_i'\gamma^2 + \eta_i'\gamma + \zeta_i' = \varepsilon' A(\cos s - \sqrt{-1} \cdot \sin s),$$

woraus sich

$$3\zeta_i' = \varepsilon B + 2\varepsilon' A \cdot \cos s$$
$$3\alpha\eta_i' = \varepsilon B + 2\varepsilon' A \cdot \cos\left(s - \frac{2\pi}{3}\right)$$
$$3\alpha^2\xi_i' = \varepsilon B + 2\varepsilon' A \cdot \cos\left(s + \frac{2\pi}{3}\right)$$

ergeben, während ε, ε' positive echte Brüche bedeuten. Aehnliches gilt von ξ_i'', η_i'', ζ_i''. Da demnach diese ganzen Zahlen nur eine endliche Anzahl verschiedener Werthe erhalten können, müssen zwei der Grössensysteme (51) einander gleich werden, und Periodicität in der Reihe derselben eintreten.

8. Suchen wir nun die Bedingung dafür, dass ϖ_i, $\varphi_i(\alpha)$, $\psi_i(\alpha)$ endlich bleiben, wenn i über jede Grenze hinaus wächst. Man findet leicht die Formel:

$$u_i p_i(\alpha) + v_i p_{i+1}(\alpha) + w_i p_{i+2}(\alpha) = 3\alpha^2 \cdot F_i,$$

welche man auch so schreiben kann:

$$(57) \quad \varpi_i + \frac{v_i}{u_i}\varphi_i(\alpha) + \frac{w_i}{u_i}\psi_i(\alpha) = 3\alpha^2 \cdot \frac{F_i}{u_i} p_i(\beta)\,p_i(\gamma).$$

Hieraus ergiebt sich, indem man für $\frac{v_i}{u_i}$, $\frac{w_i}{u_i}$ die unter (50) angegebenen Werthe einsetzt und die Gleichung

(58) $(\xi_i'\alpha - \eta_i')\psi_i(\alpha) - (\xi_i''\alpha - \eta_i'')\varphi_i(\alpha) = 3\varpi_i\alpha^2 - \Delta_i$

beachtet, für Δ_i folgender positive Werth:

$$\Delta_i = \varpi_i \cdot \frac{u_i}{F_i} p_i(\alpha) \tag{59}$$

und damit und mit Rücksicht darauf, dass auch $\frac{v_i}{u_i}$, $\frac{w_i}{u_i}$ in den Formeln (50) positiv sind, aus der Gleichung (58) die Ungleichheit:

$$\Delta_i < 3\varpi_i \cdot \alpha^2. \tag{60}$$

Hiernach ist $\frac{\Delta_i}{\varpi_i}$ d. h. (nach (59)) $\frac{u_i}{F_i} p_i(\alpha)$ stets kleiner als $3\alpha^2$, bleibt also bei unendlich wachsendem Index i endlich; es kann aber auch dabei nicht unendlich klein werden, sobald ϖ_i, $\varphi_i(\alpha)$, $\psi_i(\alpha)$ endlich bleiben. Denn alsdann erhalten ϖ_i und, wie wir gesehen haben, auch ξ_i', η_i', ξ_i', ξ_i'', η_i'', ξ_i'' und folglich auch $\frac{\Delta_i}{\varpi_i}$ nur eine endliche Anzahl von Werthen, nicht eine unbegrenzte Reihe von Werthen, welche gegen Null convergirt. Weil nun

$$\varpi_i = \frac{u_i}{F_i} p_i(\alpha) \cdot \frac{F_i}{u_i} p_i(\beta) p_i(\gamma)$$

gesetzt werden kann, folgt aus dem eben Gesagten, dass, wenn ϖ_i, $\varphi_i(\alpha)$, $\psi_i(\alpha)$ bei wachsendem i unter einer endlichen Grenze bleiben sollen, nothwendigerweise $\frac{F_i}{u_i} p_i(\beta) p_i(\gamma)$ gleichfalls endlich bleiben muss.

Diese nothwendige Bedingung ist aber auch hinreichend. Hierzu bemerken wir zuerst, dass die erste und letzte der Gleichungen (25), wenn zugleich i um eine Einheit verringert wird, durch Division mit einander folgende neue Gleichung geben:

$$\frac{w_i}{u_i} = \frac{1}{\frac{v_{i-1}}{u_{i-1}} - l_{i-1}};$$

ihr zufolge ist $\frac{w_i}{u_i}$ stets grösser als Eins. Ferner ist

$$\varphi_i(\alpha) = p_{i+1}(\alpha) \cdot p_i(\beta) p_i(\gamma)$$

kleiner als

$$\psi_i(\alpha) = p_{i+2}(\alpha) \cdot p_i(\beta) p_i(\gamma),$$

da $p_{i+1}(\alpha) < p_{i+2}(\alpha)$ ist. Demgemäss folgt aus der Gleichung (57) sofort:

$$\varpi_i < 3\alpha^2 \cdot \frac{F_i}{u_i} p_i(\beta) p_i(\gamma)$$

$$\psi_i(\alpha) < 3\alpha^2 \cdot \frac{F_i}{u_i} p_i(\beta) p_i(\gamma)$$

$$\varphi_i(\alpha) < 3\alpha^2 \cdot \frac{F_i}{u_i} p_i(\beta) p_i(\gamma),$$

und daher bleiben in der That ϖ_i, $\varphi_i(\alpha)$, $\psi_i(\alpha)$ endlich zugleich mit $\frac{F_i}{u_i} p_i(\beta) p_i(\gamma)$. So wird der Satz erhalten:

Damit die Reihe der Grössensysteme (51) oder (52) periodisch werde, ist nothwendig und hinreichend, dass $\frac{F_i}{u_i} p_i(\beta) p_i(\gamma)$ endlich bleibt, während i über jede Grenze hinaus wächst.

Man kann demselben leicht eine andere Form geben. Denn man bestätigt ohne Mühe folgende Gleichheit:

$$2p_i(\beta) p_i(\gamma) = (P_i'' - P_i'\alpha)^2 + (P_i'' - P_i\alpha^2)^2 + \alpha^2 \cdot (P_i' - P_i\alpha)^2.$$

Soll demnach $\frac{F_i}{u_i} p_i(\beta) p_i(\gamma)$ endlich bleiben, so müssen auch die beiden Ausdrücke

$$(P_i'' - P_i\alpha^2)\sqrt{\frac{F_i}{u_i}}, \quad (P_i' - P_i\alpha)\sqrt{\frac{F_i}{u_i}}$$

endlich bleiben; umgekehrt, wenn diese endlich bleiben, so gilt dasselbe auch von $(P_i'' - P_i'\alpha)\sqrt{\frac{F_i}{u_i}}$ und folglich auch von $\frac{F_i}{u_i} p_i(\beta) p_i(\gamma)$. — Aus der ersten der Gleichungen (26) folgt noch $\frac{P_i u_i}{F_i} < 1$.

Diese Bemerkungen reichen hin, um den vorigen Satz auch folgendermassen fassen zu können:

Zur Periodicität der Reihen von Grössensystemen (51) und (52) ist nothwendig und hinreichend, dass die Ungleichheit

$$(57)\quad (P_i' - P_i\alpha)^2 + (P_i'' - P_i\alpha^2)^2 + \left(\frac{u_i}{F_i}\right)^3 \cdot P_i^2 < k \cdot \frac{u_i}{F_i}$$

für alle Werthe von i erfüllt sei, während k eine passend gewählte endliche Constante bezeichnet.

Diese neue Fassung zeigt auf's Deutlichste an, dass zwischen den aus dem Jacobi'schen Kettenbruchalgorithmus entspringenden ganzen Zahlen P_i, P_i', P_i'' einerseits und denjenigen andern ganzen Zahlen X, Y, Z, für welche die Ausdrücke $Y - \alpha X$, $Z - \alpha^2 X$ gleichzeitige Minima werden, oder für welche die quadratische Form

$$f = (Y - \alpha X)^2 + (Z - \alpha^2 X)^2 + \frac{X^2}{\Delta},$$

entsprechend den veränderlichen Werthen von Δ, ihre aufeinanderfolgenden Minima annimmt — Aufgaben, wie Hermite sie in seinen zahlentheoretischen Briefen zu lösen unternimmt — ein naher Zusammenhang bestehen muss; man vergleiche in dieser Hinsicht nur die Stellen jener Briefe, welche sich finden a. a. O. pag. 265 und 295. Auch lehrt jener Satz (57) das Gesetz kennen, nach welchem die Näherungsbrüche $\frac{P_i'}{P_i}$, $\frac{P_i''}{P_i}$ mit gleichem Nenner den Werthen α, α^2 resp. sich annähern, *so oft* der Kettenbruchalgorithmus periodisch wird. Denn da in diesem Falle die Ungleichheit (57) besteht, ergeben sich daraus leicht auch die nachstehenden:

$$\frac{P_i'}{P_i} - \alpha < \frac{k^{\frac{3}{4}}}{P_i\sqrt{P_i}}, \quad \frac{P_i''}{P_i} - \alpha^2 < \frac{k^{\frac{3}{4}}}{P_i\sqrt{P_i}},$$

welche das Annäherungsgesetz aussprechen. — Wie sich nun aber jener erwähnte Zusammenhang gestalte und ob der Kettenbruchalgorithmus allzeit periodisch sei, bleibt noch eine offene Frage.

Acme
Bookbinding Co., Inc.
300 Summer Street
Boston, Mass. 02210